翰林出版

翰林數學 112 學測 A 公式

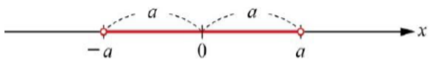
前言：108 課綱實施至今已經超過三年，本文重新整理高中數學 1~4 包括 A、B 版本課本中的 主要公式，主要目標為：(1) 希望能讓同學迅速檢視學過的核心內容。(2) 能符合新課綱重視 素養教育精神，以評量學生之系統思考、問題分析、符號運用、溝通表達等核心能力。 編寫時，為求在完整與效率之間取得平衡，並在較短時間內，有效率地協助同學回顧高中一、 二年級學習過的核心課程內容。另外因為設定學習者對象已經 學習過高一、二數學，所以部份內容會因教材內容分類的考量，編排順序會與課本順序有些微 差異。對於需要加強及重新仔細複習的課程內容，最好的方法當然是回到課本學習。

數學(1)

1. 絕對值不等式的解與圖形

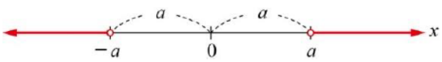
設 a 為正實數，

(1) $|x|<a$ 的解為 $-a<x<a$。



(2) $|x|\le a$ 的解為 $-a\le x\le a$。

(3) $|x|>a$ 的解為 $x<-a$ 或 $x>a$。



(4) $|x|\ge a$ 的解為 $x\le -a$ 或 $x\ge a$。

2. 乘法公式

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

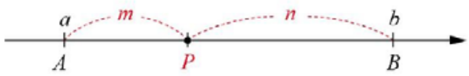
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。 （立方和）

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。 （立方差）

3.分點公式

設 $A(a)$，$B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A，B 兩點之間且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$。



4. 雙重根式

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，其中 a，$b\ge 0$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，其中 $a\ge b\ge 0$。

a，b 常可以利用觀察法找出來。

5. 算幾不等式

設 a，$b\ge 0$，則

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\text{ 。}$$

等號只有在 $a=b$ 時成立。

6. 有理數指數的定義

對於正實數 a 及正整數 n，整數 m。這個正數 b 就定義為 a 的 $\frac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$，也就是 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$。

7. 科學記號

任意正實數 a 都可以用以下形式來表示：

$$a = b \times 10^n,$$

其中 $1 \le b \le 10$，n 是整數，稱為 a 的**科學記號**表示法。

例如：一莫耳的物質有 6.02×10^{23} 個粒子；$0.0010246 = 1.0246 \times 10^{-3}$ 等等。

8. 常用對數的定義

對於每個正數 a，都有唯一的實數 x 滿足

$$10^x = a。$$

這個實數 x 記為 $\log a$，稱為 a 的常用對數，亦即 $10^{\log a} = a$。

例如$10^{\log 5566}$=5566，$\log(6.02 \times 10^{23}) = 23.7796\ldots$

(1) 常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍。

(2) 常用對數值減少 1，相當於原始數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍。

9 多項式的除法原理

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$（其中 $g(x) \neq 0$），會得到唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 且

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x),$$

其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或是 $r(x) = 0$。

10.餘式定理

多項式 $f(x)$ 被一次式 $ax-b$ 所除的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$。

例. (1) 已知多項式 $f(x) = x^3 - 8x^2 + x - 85$，試求 $f(9)$ 的值。

(2) 試求 $x^{101} + x^{10} + 2$ 除以 $x-1$ 的餘式。

11.因式定理

對於多項式 $f(x)$，下述性質成立。

(1) 若 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$，則 $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$。

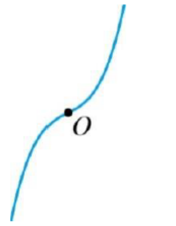
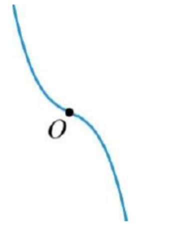
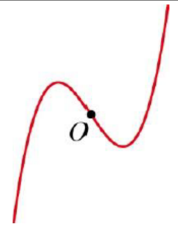
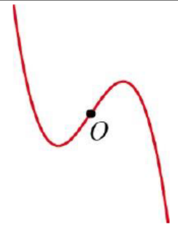
(2) 若 $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$，則 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$。

12. $y=ax^3+px$ 的圖形

$y=ax^3+px$，$a\neq 0$ 的圖形有以下特點：

(1) 圖形必過原點 O（0，0）。且對稱於原點 O（0，0），其原點為對稱中心。

(2) 函數圖形大致如下

a，p 同號		a，p 異號	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
			

13. 三次函數圖形的平移

三次多項式函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 必可表示為 $y=a(x+h)^3+p(x+h)+k$ 的形式，其中 $h=\dfrac{b}{3a}$。因此三次函數的圖形就一定可以化為 $y=ax^3+px$ 圖形的平移。

14.一次近似

設 $y=f(x)$ 為多項式函數，a 為實數，$y=f(x)$ 可改寫為

$$f(x)=a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+a_1(x-a)+a_0,$$

則 $y=a_1(x-a)+a_0$ 為 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近的一次近似。

15. 直線的斜率

設直線 L 不是鉛垂線且 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 為直線 L 上相異兩點，則直線 L 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

16.點斜式

過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

17. 兩平行直線的斜率相等

設兩相異直線（非鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

(1) 若 $L_1//L_2$，則 $m_1=m_2$。

(2) 若 $m_1=m_2$，則 $L_1//L_2$。

18. 兩垂直直線的斜率乘積為－1

設兩相異直線（非水平或鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

(1) 若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1m_2=-1$。

(2) 若 $m_1m_2=-1$，則 $L_1\perp L_2$。

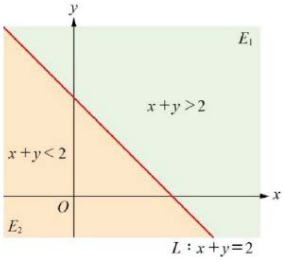
19.點到直線的距離公式

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

20. 直線不等式與半平面：

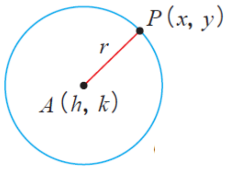
直線不等式 $ax+by>0$、$ax+by<0$的圖形就是半平面，以下實例說明。

例. $x+y>2$ 的圖形就是半平面 E_1，同理，$x+y<2$ 的圖形就是半平面 E_2，如圖。



21.圓的標準式

圓心為 A（h，k），半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。



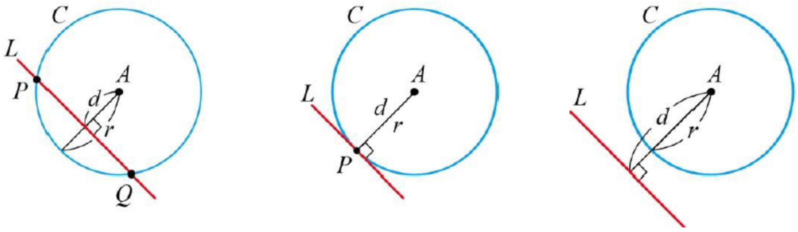
22.圓與直線的關係

設圓 C 的圓心為點 A，半徑為 r，圓心 A 到直線 L 的距離為 d，由 d 與 r 的大小關係可以歸納出下列三種情形：

(1) 當 $d<r$ 時，圓 C 與直線 L 交於兩點，如圖 5(a) 所示。

(2) 當 $d=r$ 時，圓 C 與直線 L 交於一點（相切），如圖 5(b) 所示。

(3) 當 $d>r$ 時，圓 C 與直線 L 不相交，如圖 5(c) 所示。



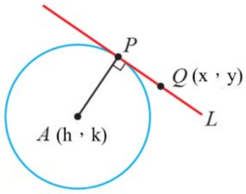
(a) $d<r$　　(b) $d=r$　　(c) $d>r$

23.圓的切線方程式

圓 C 的圓心 A、切點 P、P 點為切點與圓相切的直線 L

1.過圓上一點 P(x_0, y_0)的切線方程式，可利用直線 AP 與切線 L 垂直

（直線 AP 的斜率）（直線 L 的斜率）＝－1，



$\dfrac{y_0-k}{x_0-h}\bullet\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-1$　可得切線方程式 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$

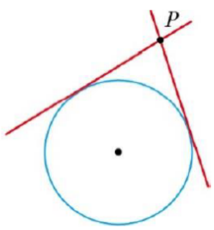
24. 過圓外一點 P(x_0, y_0)的切線方程式

過圓外一點 P 的，則過點 P 的兩條切線

Step1　設直線方程式

Step2　[圓心到切線的距離]＝[半徑] 幾何方法的判定

若上述切線方程式只有一解，則有一解可能為鉛垂線，直接檢驗即可判斷。



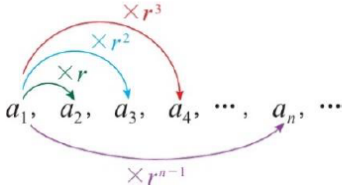
25. 等差數列的一般項

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1，公差為 d，則其一般項為 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

26.等比數列的一般項

若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 $a_1\ (a_1 \neq 0)$，公比為 $r\ (r \neq 0)$，則其一般項為

$$a_n = a_1 r^{n-1} 。$$



27.遞迴數列

(1) 遞迴數列的定義 :如果數列除了起始條件外，後面的項都可以由前面的項依公式計算，即可以表成 $\boldsymbol{a_n = f(a_{n-1})}$ 或者 $\boldsymbol{f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})}$ 的形式，此數列就是遞迴數列。

例如：等差數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + d,\ n \geq 2 \end{cases}$。

等比數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = ra_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$。

28.等差級數求和公式

首項為 a_1，公差為 d 的 n 項等差級數和為

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+(n-1)d) \\ &= \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2} \\ &= \frac{n(a_1+a_n)}{2} 。\left(\text{即} \frac{\text{項數} \times (\text{首項}+\text{末項})}{2}\right) \end{aligned}$$

29. 等比級數求和公式

首項為 $a_1 (a_1 \neq 0)$，公比為 $r\ (r \neq 0)$ 的 n 項等比級數和為

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \begin{cases} na_1 & \text{當} r = 1 \text{時}, \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & \text{當} r \neq 1 \text{時}。 \end{cases}$$

30. 求和公式

(1) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$。

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$。

31. 加權平均數

設有 n 個數據 $x_1, x_2, \cdots, x_n$， 其對應的權數分別為 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，則加權平均數為

$$W=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

32.幾何平均數

n 個正數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的幾何平均數定義為

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}\ 。$$

33. 百分位數

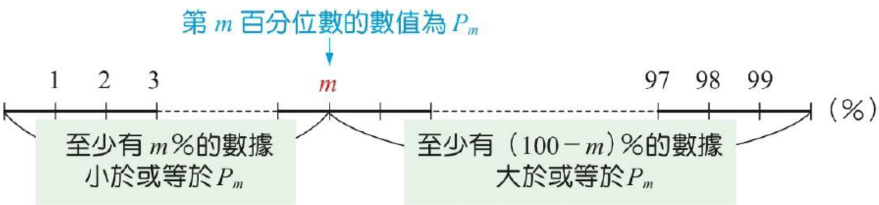


圖 3

假設一組資料有 n 筆數據，其第 m 百分位數 P_m 的算法是：先將這 n 筆數據由小到大排序，並計算 $I=n\times\frac{m}{100}$ 。

(1) 當 I 不為整數，取大於 I 的最小整數 M，則 P_m 為第 M 筆數據的值。

(2) 當 I 為整數，則 P_m 為第 I 筆數據與第 $I+1$ 筆數據的平均值。

34. 變異數、標準差

(1)設一組數據x_1，x_2，$\cdots$，x_n 之算術平均數為 μ，則定義變異數與標準差如下：

$$變異數\quad \sigma^2=\frac{1}{n}((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)\ 。$$

$$標準差\quad \sigma=\sqrt{\frac{1}{n}((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)}\ 。$$

(2) 若數據x_1，x_2，$\cdots$，x_n，的平均數μ_x,標準差s_x，經直線函數 $y=ax+b$調整為 $y_i=ax_i+b$，$i=1,2\ldots,n$，則新數據y_1，y_2，$\cdots$，y_n，的平均數 $\mu_y=a\mu_x+b$,標準差$s_y=|a|s_x$。

35. 標準化數據

一組數據 $x_1,\ldots,x_n$ 的平均 $\overline{x}$，標準差 S，

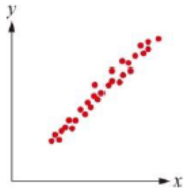
則此數據的標準化數據為$\frac{x_i-\overline{x}}{S}, i=1,\ldots,n$

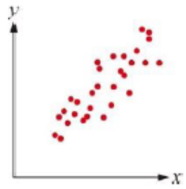
標準化數據的算術平均數為 0，標準差為 1。

36. **正相關、負相關、零相關**

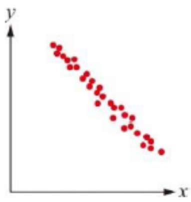
由散布圖可以快速觀察出兩個變量之間是否有關係。

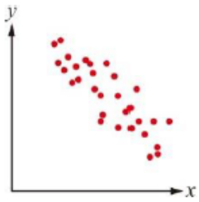
(1) **正相關**：兩個變量大約有一致的趨勢（大約同時增加或減少）。



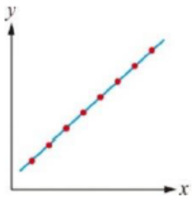


(2) **負相關**：兩個變量趨勢大約相反，一個增加，則另一個大概就會減少；或一個減少，另一個大概就會增加。

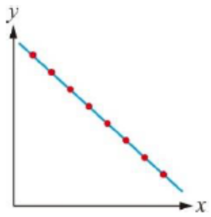




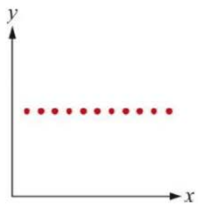
(3) **完全正相關**：資料全部在一條斜率為正的直線上。

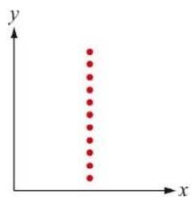


(4) **完全負相關**：資料全部在一條斜率為負的直線上。



(5) **零相關**：兩個變量的變化之間無關。





翰林出版

37. 由原始資料求相關係數

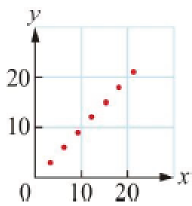
原始數據資料 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 的相關係數為

$$r=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{\sqrt{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+\cdots+(x_n-\mu_x)^2}\cdot\sqrt{(y_1-\mu_y)^2+(y_2-\mu_y)^2+\cdots+(y_n-\mu_y)^2}}$$

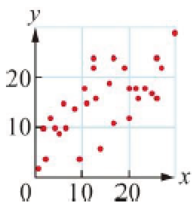
（一）相關係數 $r>0$

當 $r=1$ 時，資料均在同一條斜率為正的直線上，當 $0<r<1$ 時，r 愈大，代表資料分布大致呈右上左下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為正的直線。

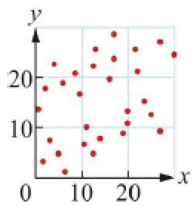
$r=1$



$r=0.7$



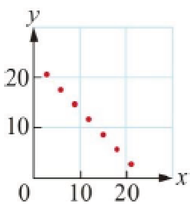
$r=0.3$



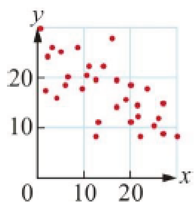
（二）相關係數 $r<0$

當 $r=-1$ 時，資料均在同一條斜率為負的直線上，當 $-1<r<0$ 時，r 的絕對值愈大，代表資料分布大致呈左上右下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為負的直線。

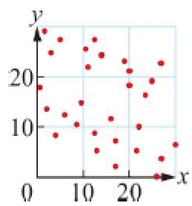
$r=-1$



$r=-0.7$



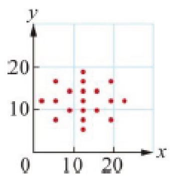
$r=-0.3$



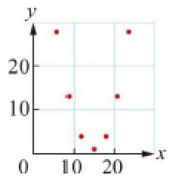
（三）相關係數 $r=0$

它們的分布呈現左右對稱、或者上下對稱。

$r=0$



$r=0$



又當兩組數據的散布圖完全落在一條水平直線或鉛垂直線時，我們規定其相關係數 $r=0$。

38. 二維數據的最適直線方程式

數據 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 之 y 對 x 的最適直線方程式為

$$y-\mu_y=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\mu_x)，$$ 其中 r 為相關係數，

39.加法原理

若完成一件工作的方法，可分成 k 類，各類之間都沒有重複的情形，每一類方法分別有 $n_1,\ldots,n_k$ 種，則完成這件工作的方法是所有類的方法數的**和**，即

$$n_1+n_2+\text{L}\ +n_k \text{ 種。}$$

40.乘法原理

若完成一件工作的方法，可依序分成 k 個步驟，且完成每一步驟的方法分別有 $n_1,\ldots,n_k$ 種，則完成這件工作的方法是所有步驟的方法數的**乘**，即

$$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k \text{ 種。}$$

41.取捨原理

設 A，B，C 為有限集合。則有：

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$
$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

42. n 個不同物品的排列

將 n 個不同物品排成一列有

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1 \text{ 種方法。}$$

43. n 個不同物品選出 k 個排列

令 P_k^n 表示從 n 個不同物品中選出 k 個 $(0\le k\le n)$ 排成一列的方法數，則

$$P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}\text{。}$$

44. 含有相同物品的排列

設 n 個物品分成 k 類，每類各有 $m_1,m_2,\text{L}\ ,m_k$ 個（每類中的物品相同且 $m_1+m_2+\text{L}\ +m_k=n$），則這 n 個物品排成一列有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 種方法。

45. 重複排列

從 n 種物品中取出 k 個（每種物品都至少有 k 個），物品可以重複出現的排列有 n^k 種方法。

46.組合

用 C_k^n 表示從 n 個不同的物品中挑出 k 個不同物品的組合數 $(0\le k\le n)$，則

$$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}\text{。}$$

47. 二項式定理

設 n 為非負整數，則

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + \text{L} + C_k^n x^{n-k} y^k + \text{L} + C_0^n x^0 y^n \text{ 。}$$

48. 巴斯卡公式

$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$，$1 \le k \le n-1$。

1	C_0^0	$n=0$
1 1	C_0^1 C_1^1	$n=1$
1 2 1	C_0^2 C_1^2 C_2^2	$n=2$
1 3 3 1	C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3	$n=3$
1 4 6 4 1	C_0^4 C_1^4 C_2^4 C_3^4 C_4^4	$n=4$
1 5 10 10 5 1	C_0^5 C_1^5 C_2^5 C_3^5 C_4^5 C_5^5	$n=5$
1 6 15 20 15 6 1	C_0^6 C_1^6 C_2^6 C_3^6 C_4^6 C_5^6 C_6^6	$n=6$

49. 古典機率的定義

設一試驗的樣本空間為 S，且其樣本點個數為有限。若每一基本事件發生的機會均等，則事件 A 發生的機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ 。

50. 機率的性質

所有的機率不論是古典機率、主觀機率還是客觀機率，對所有事件 A，B 皆有下列性質：

(1) $0 \le P(A) \le 1$。

(2) $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$。

(3) $P(A')=1-P(A)$。

(4) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$。

51. 期望值

已知 A_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$ 為樣本空間 S 的事件，且滿足以下兩個條件：

(1) 所有事件的聯集是整個樣本空間。

(2) 任兩個事件的交集是空集合。

設事件 A_i 發生的機率為 p_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$。若事件 A_i 發生可得值 m_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$，則我們定義得值的期望值為

$$m_1 \times p_1 + m_2 \times p_2 + \cdots + m_n \times p_n \text{ 。}$$

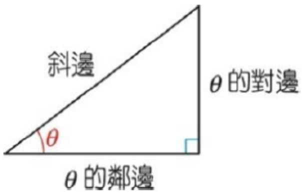
52. 直角三角形的三角比

如圖 5 所示，當 θ 為一銳角，可以畫出一個三個角為 θ, $90°-\theta$，$90°$的直角三角形。我們定義如下的三角比：

$\sin\theta=\dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的正弦。

$\cos\theta=\dfrac{\theta\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的餘弦。

$\tan\theta=\dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\text{鄰邊長}}$，稱為 θ 的正切。



值 \ θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

53. 同界角

若廣義角 θ 與 ϕ 的差為 $360°$的整數倍，即 $\theta-\phi=360°\cdot n$，其中 n 為整數，則稱 θ 與 ϕ 互為同界角。

例如 $485^{\circ},845^{\circ},125^{\circ}+360^{\circ}n$ 以及-235°,$-235^{\circ}-360^{\circ}$ 皆是-125°的同界角。

54. 廣義角的三角比

如下圖所示，設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，且

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=r$（其中 $r>0$），我們定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq 0)$。

55. 商數關係、平方關係及餘角關係

(商數關係) $\theta\neq 90°$，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$。

(平方關係) 設 $0°<\theta<90°$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

(餘角關係) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。

56. $-\theta$關係、$180°-\theta$關係、$90°-\theta$關係

對於任意角 θ，都有

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\cos(-\theta)=\cos\theta$,

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$。($\theta$ 的終邊不在 y 軸上時)

(2) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$,

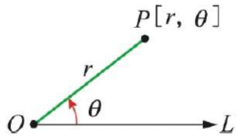
$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$,

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$。(當角 θ 的終邊不在 y 軸上時)

(3) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。

57. 極坐標

給定平面上的一點 O 及以 O 為始點的射線 L。對於平面上異於 O 的任一點 P，若 $\overline{OP}=r$，且以 L 為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角為 θ，則 $[r,\theta]$ 稱為 P 點的一個極坐標，記為 $P[r,\theta]$，



58. 直角坐標與極坐標的轉換

(1) 若 P 點的極坐標為 $[r,\theta]$，則直角坐標為

$$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)。$$

(2) 若 P 點不是原點且直角坐標為 (x,y)，則極坐標為

$$[r,\theta],$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$。

59. 三角形面積公式

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則

$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C。$$

60. 正弦定理

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，且$\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，則：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

61. 餘弦定理

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

62.弳

若一圓的半徑為 r，則弧長 s 所對應的圓心角 $\theta=\frac{s}{r}$ 弳。

由 $180°=\pi$ 弳，可得

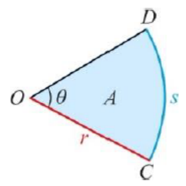
$$1°=\frac{\pi}{180} \text{ 弳} \approx 0.01745 \text{ 弳}，1 \text{ 弳}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3°。$$

63. 扇形的弧長與面積公式

已知圓半徑為 r，扇形 COD 的圓心角 $\angle COD=\theta$（弳），$0\leq\theta\leq2\pi$，如圖 7，令扇形的弧長為 s，面積為 A，則：

(1) 扇形的弧長 $s=r\theta$。

(2) 扇形的面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$



64. (1) 正弦、餘弦的和角公式與差角公式

對於任意角 α 與 β，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。$$

(2) 正切的和角公式與差角公式

當 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 均有意義時，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

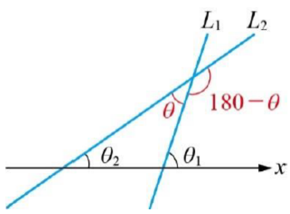
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}。$$

65. 直線的斜角

設直線 L 的斜角為 θ（L 不為鉛垂線），則 L 的斜率為 $\tan\theta$。

66. 兩直線的夾角

直線 L_1 與 L_2 的斜率時，就可以分別求出 L_1、L_2 的斜角 θ_1、θ_2（$\theta_1>\theta_2$），如右圖所示，此時 L_1 與 L_2 的夾角 θ，即可由 $\theta_1-\theta_2$ 得來，同時 $180°-\theta$ 也是 L_1 與 L_2 的夾角。



67. 二倍角公式

(1) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。

(3) $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。（其中 $\tan\theta$，$\tan2\theta$ 均有意義）

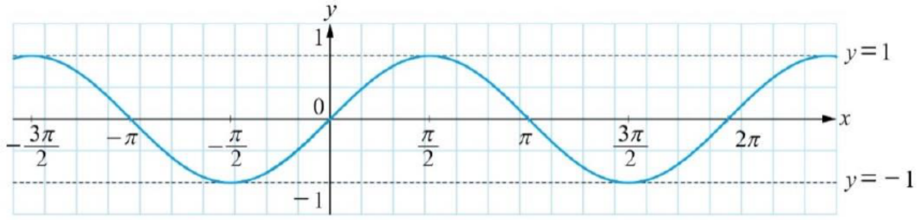
68. 半角公式

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\text{，}\quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\text{，}$$

等號右邊取正或取負由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

69.正弦函數

正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形如下圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為所有實數，亦可記為 $(-\infty, \infty)$。

(2) 值域為 $[-1, 1]$。

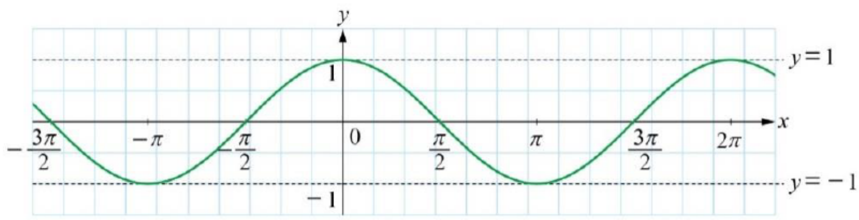
(3) 週期為 2π。

(4) 振幅為 1。

(5) 圖形對稱於原點。

70. 餘弦函數

餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形如下圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為所有實數，亦可記為 $(-\infty, \infty)$。

(2) 值域為 $[-1, 1]$。

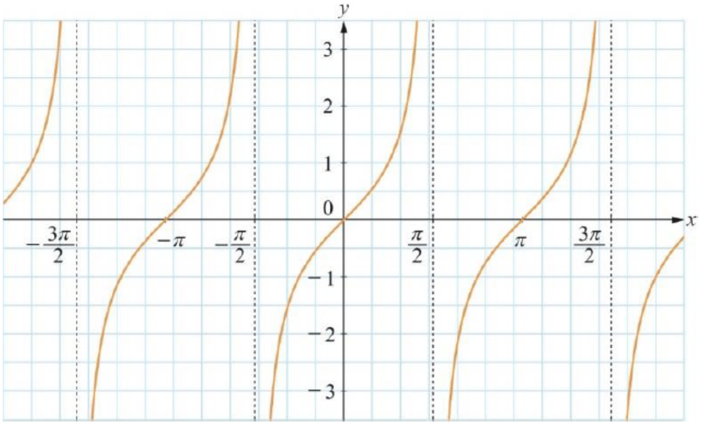
(3) 週期為 2π。

(4) 振幅為 1。

(5) 圖形對稱於 y 軸。

71. 正切函數

正切函數 $y=\tan x$ 的圖形如圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為 $\left\{x \middle| x\text{為實數且 } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\text{ 為整數}\right\}$。

(2) 值域為所有實數，亦可記為 $(-\infty,\ \infty)$。

(3) 週期為 π。

(4) 圖形對稱於原點。

72. 函數圖形的平移及伸縮

1. 平移：設 $h,\ k>0$。

(1) $y=f(x)+k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向上平移 k 單位而得。

(2) $y=f(x)-k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向下平移 k 單位而得。

(3) $y=f(x+h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向左平移 h 單位而得。

(4) $y=f(x-h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 h 單位而得。

2. 伸縮：設 $a>0$。

(1) $y=af(x)$ 的圖形是 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 y 坐標都乘上 a 倍。

(2) $y=f(ax)$ 的圖形是 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 x 坐標都乘上 $\frac{1}{a}$ 倍。

73. 正、餘弦函數的疊合公式

設 $a,\ b$ 是不全為 0 的實數，則

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\theta),$$

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

翰林出版

74.(1)指數函數

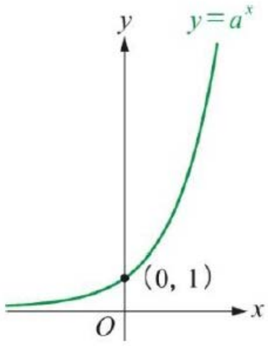
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則稱函數 $f(x)=a^x$ 是以 a 為底的指數函數。

(2)指數函數的定義域與值域

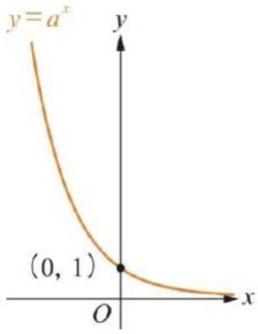
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，且值域為所有正實數。

(3)指數函數圖形

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



$a>1$



$0<a<1$

75. 常用對數的基本性質

設 $r, s>0$，t 為實數。則有以下性質：

(1) $\log r+\log s=\log rs$。　(2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$。　(3) $\log r^t=t\times\log r$。

76. 以 a 為底數的對數定義

設底數 $a>0$，$a\neq 1$ 且 $r>0$，若實數 b 滿足 $a^b=r$，則稱 b 為“以 a 為底數時，r 的對數，”記為 $b=\log_a r$。

77. 換底公式

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，對於任意正數 r，則 $\log_a r=\dfrac{\log r}{\log a}$。

78. 對數函數

設 $a>0$，$a\neq 1$，且 x 是任意正數，則稱函數

$$f(x)=\log_a x$$

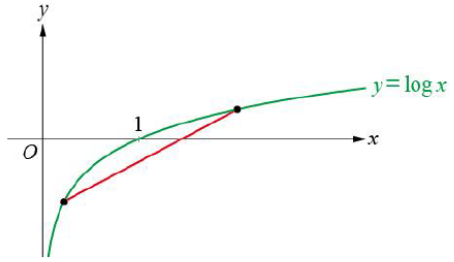
為以 a 為底數的對數函數，其定義域為所有正實數，值域為所有實數。

79. **比較 $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 的圖形**

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 的兩個函數圖形對稱於直線 $x-y=0$

80. **對數函數$\log_a x$, $a>1$圖形的凹向性**

(1) 觀察圖形可以看出常用對數函數 $y=\log x$ 的函數圖形為凹口向下。



(2) 因為$\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$ $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 10}$，由於 $\log_a 10>0$， 所以**對數函數$\log_a x$** 也是

凹口向下的。

81. 對數的首數與尾數

設 a 為正實數。

(1) 以科學記號表示：$a=b\times 10^n$

(2) 將 $\log a$ 表為以下的形式，

$\log a=n+\log b$（其中 n 為整數，$0\le \log b<1$），則稱 n 為 $\log a$ 的首數，$\log b$ 為 $\log a$ 的尾數。

82. 用首數判斷位數

(1) 設 $a>1$，若 $\log a$ 的首數是 n（$n\ge 0$），則 a 的整數部分是（$n+1$）位數，反之亦然。

(2) 設 $0<a<1$，若 $\log a$ 的首數是$-n$（$n>0$），則 a 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字，反之亦然。

83. 單利與複利

設本金為 a，每期利率為 r。

(1) 以單利孳息，經過 n 期後，本利和為 $a(1+nr)$。

(2) 以複利孳息，每年的本利和是前一期的（$1+r$）倍，故 n 期後的本利和是

$$a\underbrace{(1+r)(1+r)\cdots\cdots(1+r)}_{n\text{ 個}}=a(1+r)^n。$$

(3). 零存整付

複利計算下，n 期後可以領回的本利和為

$$a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+\cdots+a(1+r)^2+a(1+r)$$

$$=a(1+r)\times\frac{(1+r)^n-1}{r}\ （元）。$$

84. **常數** e

n 愈來愈大時，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 會愈接近一個數 2.718281828⋯，這個常數是一個無理數，特別記為 e。稱為**自然對數的底數**。

85. (1)向量的坐標表示法與長度

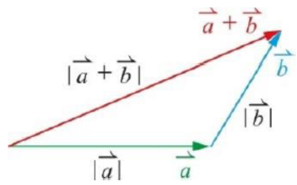
坐標平面上的任意一個向量 $\vec{v}$，將始點放在原點，設終點坐標為 (x, y)，則：$\vec{v}=(x, y)$ 稱為 $\vec{v}$ 的坐標表示。$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ 為 $\vec{v}$ 的長度。

(2) 三角不等式

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為任意兩向量。則

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|,$$

等號在 $\vec{a}$，$\vec{b}$，或 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 中有零向量時成立。



86. 向量的線性組合

若 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量 $\overline{OP}$ 必能唯一表成

$$\overline{OP}=x\overline{OA}+y\overline{OB}$$

的形式，其中 x，y 為實數。

87. 分點公式

設 P 點是線段 $\overline{AB}$ 上的點，且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則對任一點 O，

$$\overline{OP}=\frac{n}{m+n}\overline{OA}+\frac{m}{m+n}\overline{OB}\text{。}$$

88. 三點共線

平面上的相異四點 P，A，B，O，其中 O 不在直線 AB 上。

若 $OP=\alpha OA+\beta OB$，則 P，A，B 三點共線的充要條件為 $\alpha+\beta=1$。

89. 平面向量的內積

(1) 如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之中有一為零向量，則其內積為 0。

(2) 坐標平面上兩非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$，

其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，

(3) 坐標平面上兩向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$ 的內積

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2\text{。}$$

90. 兩向量垂直的判定法則

不論是平面或空間向量，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個非零向量，則：

(1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

(2) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直。

翰林出版

91. 內積的基本性質

不論是平面或空間向量，設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 為任意向量，α 為任意實數，則：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。

(2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$。

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$。

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$。

92. 柯西不等式

(1) 向量形式：若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為平面上任意兩非零向量，則 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$，

且等號成立時若且唯若 $\vec{a}//\vec{b}$。。

(2) 一般形式：若 a_1, a_2, b_1, b_2 為任意實數，則

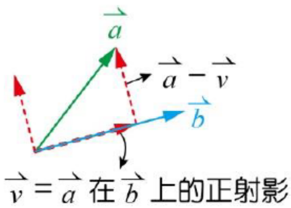
$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2,$$

且等號成立於 $a_1b_2=a_2b_1$ 時。$\left(\text{如果 } b_1b_2\ne0, \text{可寫成 } \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\right)$

93. 向量的正射影

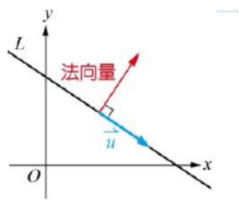
不論是平面或空間向量，設 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為兩個向量，且

$\vec{b}\ne\vec{0}$，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$。



94. 直線的法向量

向量 (a, b) 為直線 L：$ax+by+c=0$ 的一個法向量。



95. 二階行列式

二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

96. 三角形與平行四邊形的面積公式

設 $\overset{\vee}{u}=(a_1, a_2)$ 和 $\overset{\vee}{v}=(b_1, b_2)$ 為兩個非零向量。

97.線性組合與二元一次方程組

解二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ 即要找出實數 x, y 滿足線性組合

$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$。

翰林出版

98. 克拉瑪公式

已知二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$

設 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，當 $\Delta\neq 0$ 時，方程組恰有一組解為 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$， $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ 。

99. 克拉瑪公式的幾何意義

在線性組合 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$ 中，若 x，$y>0$，則

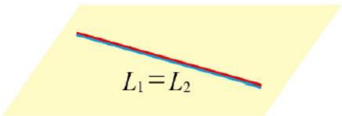
$$(x\ ,\ y)=\left(\frac{\vec{c},\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}\ ,\ \frac{\vec{a},\vec{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}\right)。$$

數學(4A)

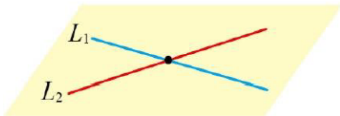
100.直線與直線的關係

空間中的兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有下列四種情形：

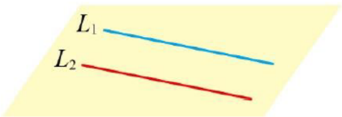
(1) 兩直線重合。



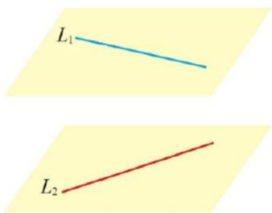
(2) 兩直線恰交於一點。



(3) 兩直線平行。

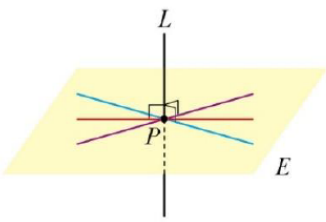


(4) 兩直線歪斜。



101.直線與平面垂直的定義

若直線 L 與平面 E 相交於一點 P，且平面 E 上通過 P 點的每一條直線都與直線 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，記為 $L\perp E$，此時直線 L 稱為平面 E 的一條法線

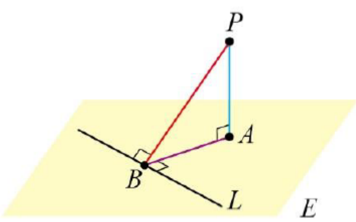


102. 三垂線定理

設直線 PA 與平面 E 垂直於 A 點，直線 L 為平面 E 上不通過 A 點的直線。

(1) 若由 A 點向直線 L 作垂線，設其垂足為 B，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，如圖所示。

(2) 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點。



103. 距離公式

坐標空間中，$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 兩點的距離為

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

104. 空間向量的內積

坐標空間中兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的內積為

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3。$$

105. 柯西不等式

(1) 向量形式：若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為空間中任意兩非零向量，則

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|,$$

等號成立於 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$ 或 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 兩向量中有一向量為零向量時。

(2) 一般形式：若 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 為任意實數，則

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2,$$

等號成立於存在一實數 t 使得 $(a_1,a_2,a_3)=t(b_1,b_2,b_3)$或 $b_1=b_2=b_3=0$ 時。

106.空間向量的外積

設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 為坐標空間中兩向量，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的外積為向量 $(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$，記作 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$。

107. 空間向量外積的基本性質

設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩非零向量，則：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$。

(2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行時，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$。

(3) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 同時與 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 垂直。

(4) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\sin\theta$，其中 θ 為 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角。

108. 三階行列式

下列等式中的左式稱為三階行列式，右式為此三階行列式的值（或展開式）。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1。$$

109. 平行六面體體積

由 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2, c_3)$ 三個不共平面的非零向量所決定的平行六面體體積為

$$\left|\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\right|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 的絕對值。}$$

110. 平面方程式

若 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 為平面 E 的一個法向量，且 $A(x_0, y_0, z_0)$ 為平面 E 上的一個點，則平面 E 的方程式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

111. 兩平面的夾角

設平面 E_1、E_2 的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$。若 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角為 θ，則平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180°-\theta$，其中 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$。

112. 點到平面的距離公式

坐標空間中，點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 的距離為

$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

113. 兩平行平面的距離

兩平行平面 $E_1: ax+by+cz+d_1=0$, $E_2: ax+by+cz+d_2=0$。

的距離為 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

114. 直線的參數式

設直線 L 通過點 $A(x_0, y_0, z_0)$，且與非零向量 $\overrightarrow{v}=(a, b, c)$ 平行，則直線 L 的參數式為

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \quad t \text{ 為實數}, \\ z=z_0+ct, \end{cases}$$

其中 t 稱為參數，$\overrightarrow{v}$ 稱為直線 L 的方向向量。

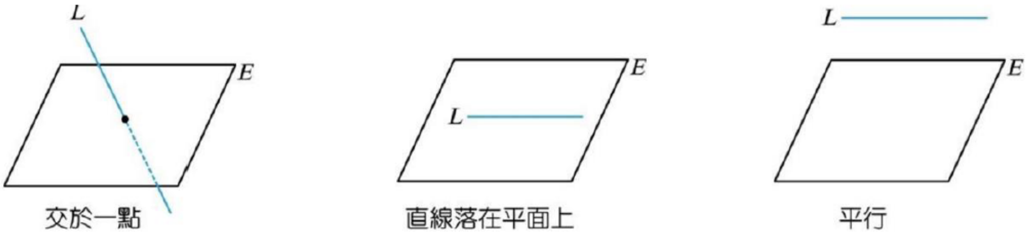
115. 直線的比例式

設直線 L 通過點 $A(x_0, y_0, z_0)$，且與向量 $\overrightarrow{v}=(a, b, c)$ 平行，其中 a, b, c 皆不為 0，則直線 L 的比例式為 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$。

翰林出版

116. 直線與平面的關係

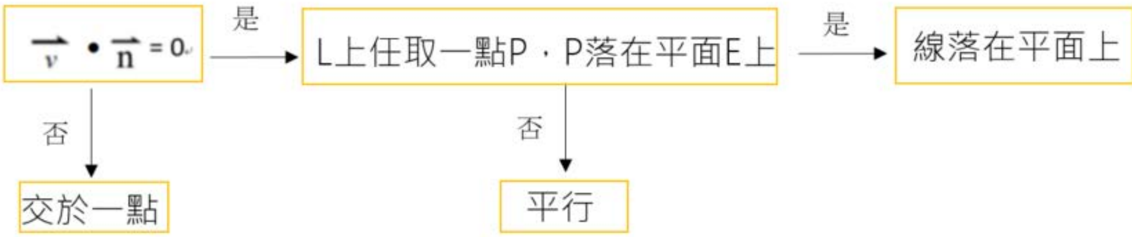
坐標空間中一條直線 L 與一個平面 E 的關係，可以出現下列三種情形：



可以經由以下程序判斷：若直線L-方向向量 $\vec{v}$，平面E-法向量 $\vec{n}$

(1) $\vec{v}$ 是否與 $\vec{n}$ 垂直

(2)若 $\vec{v}$ 垂直 $\vec{n}$ ，L上任取一點是否在平面上



117. 二直線關係的判斷

空間中兩直線 L_1 與 L_2 其方向向量分別為 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$，當 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$ 不平行時，兩直線可能相交於一點，或歪斜。當 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$ 平行時，兩直線可能平行或重合。

可依下列程序判定：

1.先檢查是否平行(即：檢查方向向量是否平行)。
2.再檢查是否相交(利用參數式)。
3.若既不平行，亦不相交，則兩直線為歪斜線。

翰林出版

118. 高斯消去法與矩陣的列運算

1.高斯消去法的求解過程，每一步驟都是下列三種操作之一：

(1) 將某兩個方程式對調。

(2) 將某個方程式乘上一個不為 0 的常數。

(3) 將某個方程式乘上一個不為 0 的常數後，再加到另一個方程式。

2.矩陣的列運算

解線性方程組時對應的增廣矩陣其各列操作有下列三種形式：

(1) 將某兩列對調。

(2) 將某一列乘上一個不為 0 的常數。

(3) 將某一列乘上一個不為 0 的常數後，再加到另一列。

這三個操作稱為**矩陣的列運算**。矩陣列運算操作前後的增廣矩陣所對應的線性方程組的解是完全相同的　下例來說明過程。

高斯消去法

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-1, & ① \\ x+y+z=2, & ② \\ 3x-y+2z=13。 & ③ \end{cases}$$

(1) 將①式與②式對調，得

$$\begin{cases} x+y+z=2, & ④ \\ 2x+3y-z=-1, & ⑤ \\ 3x-y+2z=13。 & ⑥ \end{cases}$$

(2) ④×（−2）+⑤，④×（−3）+⑥，得

$$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑦ \\ y-3z=-5, & ⑧ \\ -4y-z=7。 & ⑨ \end{cases}$$

(3) ⑧×4+⑨，得

$$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑩ \\ y-3z=-5, & ⑪ \\ -13z=-13。 & ⑫ \end{cases}$$

(4) ⑫$\times\left(-\frac{1}{13}\right)$，得

$$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑬ \\ y-3z=-5, & ⑭ \\ z=1。 & ⑮ \end{cases}$$

矩陣列運算

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{bmatrix} \times(-2) \quad \times(-3)$$

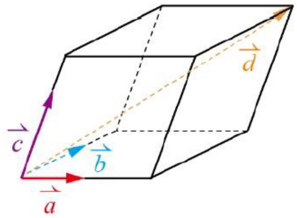
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix} \times\left(-\frac{1}{13}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故線性方程組的解為 $x=3$，$y=-2$，$z=1$。

119. 線性組合的幾何意義



當坐標空間中非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 不在同一平面上時，則任一空間向量 $\overrightarrow{d}$ 必可表示成 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 的線性組合

$$\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c},$$

且這個表示法是唯一的。

120. 矩陣的定義

設 m，n 為正整數，形如

$$\begin{array}{cc} & \text{第 } j \text{ 行} \\ & \downarrow \\ \text{第 } i \text{ 列} \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

的矩形陣列稱為 $m\times n$ 階矩陣，以〔a_{ij}〕$_{m\times n}$ 表示。此矩陣有 m 列，n 行，其中 a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元，稱為矩陣的第（i，j）元。

121. 矩陣加法、減法與係數積的定義

1. 設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，且

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \text{ 則}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

即將相同位置的元相加。也就是若 $A=$〔a_{ij}〕$_{m\times n}$，$B=$〔b_{ij}〕$_{m\times n}$，則 $A+B=$〔$a_{ij}+b_{ij}$〕$_{m\times n}$。

2. 矩陣減法的定義

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，則定義 A 與 B 的差為 $A-B=A+(-B)$。即 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元。

也就是若 $A=$〔a_{ij}〕$_{m\times n}$，$B=$〔b_{ij}〕$_{m\times n}$，則 $A-B=$〔$a_{ij}-b_{ij}$〕$_{m\times n}$。

3. 矩陣的係數積

即若 $A=$〔a_{ij}〕$_{m\times n}$，則 $rA=$〔ra_{ij}〕$_{m\times n}$。

翰林出版

123. 矩陣乘法的定義

設 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，$C=[c_{ij}]_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，即

$$\begin{array}{cc} \text{第 } i \text{ 列} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 行} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

A　　B　　$=$　　C

在前面的定義中，注意到 A，B 兩個矩陣相乘時，矩陣 A 的行數必須要等於矩陣 B 的列數，AB 才有意義，而且

$$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}。$$

相等

(1) 矩陣的乘法不一定可以交換，即 AB 與 BA 不一定相等。例如：

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}。$$

(2) 若 $AB=O$，不一定 A，B 至少有一個為零矩陣。例如：

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}。$$

(3) 若 $AB=AC$，不一定 $B=C$。例如：

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&3\end{bmatrix}。$$

122. 矩陣的係數積具有以下的性質：

(1) $r(A+B)=rA+rB$。

(2) $(r+s)A=rA+sA$。

(3) $(rs)A=r(sA)$。

(4) $0A=O$。　　（等號左邊表示乘上 0，等號右邊是零矩陣）

(5) $(-1)A=-A$。

124. 乘法反方陣

1. 設 A 是一個 n 階方陣，若存在 n 階方陣 B 滿足 $AB=BA=I_n$，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以符號 A^{-1} 表示。

2. 二階乘法反方陣的公式

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的行列式 $\det A\neq 0$，則 A 有乘法反方陣 A^{-1}，

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$。

若 $\det A=0$，則 A 沒有乘法反方陣。

125. 2 階轉移矩陣

2 階方陣 A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$若滿足

(1) 每一元 $a_{ij} \geq 0$

(2) $a_{11} + a_{21} = 1 = a_{12} + a_{22}$ （即每一行的各元之和都為 1）。

則稱 A 是一個 2 階的轉移矩陣。

126. 平面上的線性變換

任何一個二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 都定義了一個坐標平面上的線性變換，將點 P（x，y）變換到點 P'（X，Y），其中 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$。

127. 線性變換的面積比

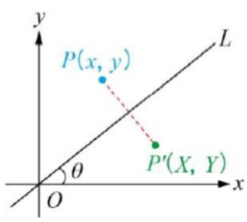
令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$S_1$ 為平面上的一個平行四邊形。設 S_1 經由 A 所定義的線性變換變成 S_2，則 $\dfrac{S_2\text{ 的面積}}{S_1\text{ 的面積}} = \left|\det A\right|$。

128. 伸縮矩陣、伸縮變換

$\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，$h \neq 0$，$k \neq 0$ 的矩陣稱為**伸縮矩陣**，其定義的線性變換為**伸縮變換**，此變換的作用為分別將 x、y 坐標伸縮為 h、k 倍。

129. 鏡射矩陣、鏡射變換

一般而言，若直線 L 通過原點且斜角為 θ，則 L 的鏡射變換可寫成 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$



130. 旋轉矩陣、旋轉變換

形如 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 的矩陣稱為**旋轉矩陣**，其定義的線性變換稱為**旋轉變換**，此變換的作用為“以原點為中心旋轉 θ 角。”

翰林出版

131. 推移矩陣、推移變換

設 k 為實數，則：

(1) 形如 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的矩陣稱為 x 方向的**推移矩陣**，其定義的線性變換為“往 x 方向推移 y 坐標 k 倍”的**推移變換**。

(2) 形如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 的矩陣稱為 y 方向的**推移矩陣**，其定義的線性變換為“往 y 方向推移 x 坐標 k 倍”的**推移變換**。

132. 條件機率

設 A，B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$。則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率為 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

133. 獨立事件

設 A，B 為兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A，B 為獨立事件。

134. 三事件為獨立事件

設 A，B，C 為三事件，同時滿足下列條件時，稱 A，B，C 三事件為獨立事件。

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

(2) $P(B\cap C)=P(B)P(C)$。

(3) $P(A\cap C)=P(A)P(C)$。

(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$。