輸林出版

翰林數學 112 學測 B 公式

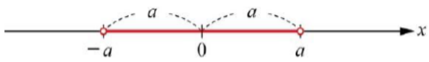
前言：108 課綱實施至今已經超過三年，本文重新整理高中數學 1~4 包括 A、B 版本課本中的 主要公式，主要目標為：(1) 希望能讓同學迅速檢視學過的核心內容。(2) 能符合新課綱重視 素養教育精神，以評量學生之系統思考、問題分析、符號運用、溝通表達等核心能力。 編寫時，為求在完整與效率之間取得平衡，並在較短時間內，有效率地協助同學回顧高中一、 二年級學習過的核心課程內容。另外因為設定學習者對象已經 學習過高一、二數學，所以部份內容會因教材內容分類的考量，編排順序會與課本順序有些微 差異。對於需要加強及重新仔細複習的課程內容，最好的方法當然是回到課本學習。

數學(1)

1. 絕對值不等式的解與圖形

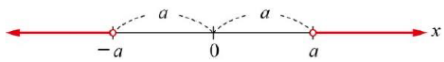
設 a 為正實數，

(1) $|x|<a$ 的解為 $-a<x<a$。



(2) $|x|\le a$ 的解為 $-a\le x\le a$。

(3) $|x|>a$ 的解為 $x<-a$ 或 $x>a$。



(4) $|x|\ge a$ 的解為 $x\le -a$ 或 $x\ge a$。

2. 乘法公式

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

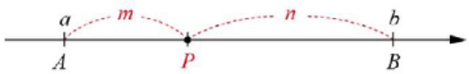
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。 （立方和）

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。 （立方差）

3.分點公式

設 $A(a)$，$B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A，B 兩點之間且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$。



4. 雙重根式

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，其中 a，$b\ge 0$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，其中 $a\ge b\ge 0$。

a，b 常可以利用觀察法找出來。

5. 算幾不等式

設 a，$b\ge 0$，則

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}。$$

等號只有在 $a=b$ 時成立。

6. 有理數指數的定義

對於正實數 a 及正整數 n，整數 m。這個正數 b 就定義為 a 的 $\frac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$，也就是 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$。

7. 科學記號

任意正實數 a 都可以用以下形式來表示：

$$a = b \times 10^n,$$

其中 $1 \le b \le 10$，n 是整數，稱為 a 的**科學記號**表示法。

例如：一莫耳的物質有 6.02×10^{23} 個粒子；$0.0010246 = 1.0246 \times 10^{-3}$ 等等。

8. **常用對數的定義**

對於每個正數 a，都有唯一的實數 x 滿足

$$10^x = a。$$

這個實數 x 記為 $\log a$，稱為 a 的常用對數，亦即 $10^{\log a} = a$。

例如$10^{\log 5566}$=5566，$\log(6.02 \times 10^{23}) = 23.7796\ldots$

(1) 常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍。

(2) 常用對數值減少 1，相當於原始數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍。

9 多項式的除法原理

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$（其中 $g(x) \neq 0$），會得到唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 且

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x),$$

其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或是 $r(x) = 0$。

10.餘式定理

多項式 $f(x)$ 被一次式 $ax-b$ 所除的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$。

例. (1) 已知多項式 $f(x) = x^3 - 8x^2 + x - 85$，試求 $f(9)$ 的值。

(2) 試求 $x^{101} + x^{10} + 2$ 除以 $x-1$ 的餘式。

11.因式定理

對於多項式 $f(x)$，下述性質成立。

(1) 若 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$，則 $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$。

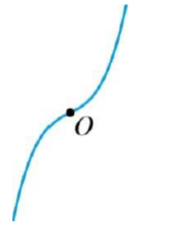
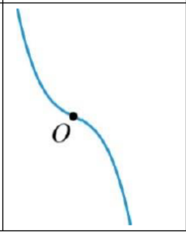
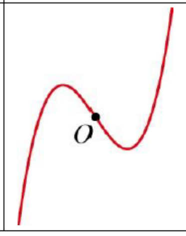
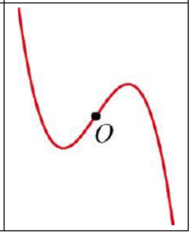
(2) 若 $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$，則 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$。

12. $y=ax^3+px$ 的圖形

$y=ax^3+px$， $a\neq 0$ 的圖形有以下特點：

(1) 圖形必過原點 O（0，0）。且對稱於原點 O（0，0)，其原點為對稱中心。

(2) 函數圖形大致如下

a，p 同號		a，p 異號	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
			

13. 三次函數圖形的平移

三次多項式函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 必可表示為 $y=a(x+h)^3+p(x+h)+k$ 的形式，其中 $h=\dfrac{b}{3a}$。因此三次函數的圖形就一定可以化為 $y=ax^3+px$ 圖形的平移。

14.一次近似

設 $y=f(x)$ 為多項式函數，a 為實數，$y=f(x)$ 可改寫為

$$f(x)=a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+a_1(x-a)+a_0,$$

則 $y=a_1(x-a)+a_0$ 為 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近的一次近似。

15. 直線的斜率

設直線 L 不是鉛垂線且 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 為直線 L 上相異兩點，則直線 L 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

16.點斜式

過點 $A(x_0，y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

17. 兩平行直線的斜率相等

設兩相異直線（非鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

(1) 若 $L_1//L_2$，則 $m_1=m_2$。

(2) 若 $m_1=m_2$，則 $L_1//L_2$。

18. 兩垂直直線的斜率乘積為－1

設兩相異直線（非水平或鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

(1) 若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1m_2=-1$。

(2) 若 $m_1m_2=-1$，則 $L_1\perp L_2$。

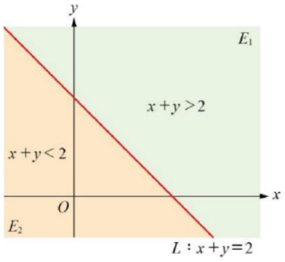
19.點到直線的距離公式

點 $P(x_0，y_0)$ 到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

20. 直線不等式與半平面：

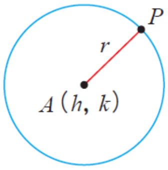
直線不等式 $ax+by>0$、$ax+by<0$的圖形就是半平面，以下實例說明。

例. $x+y>2$ 的圖形就是半平面 E_1，同理，$x+y<2$ 的圖形就是半平面 E_2，如圖。



21.圓的標準式

圓心為 $A(h，k)$，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。



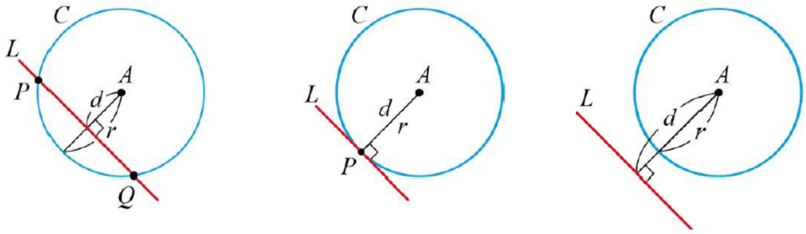
22.圓與直線的關係

設圓 C 的圓心為點 A，半徑為 r，圓心 A 到直線 L 的距離為 d，由 d 與 r 的大小關係可以歸納出下列三種情形：

(1) 當 $d<r$ 時，圓 C 與直線 L 交於兩點，如圖 5(a) 所示。

(2) 當 $d=r$ 時，圓 C 與直線 L 交於一點（相切），如圖 5(b) 所示。

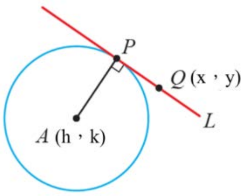
(3) 當 $d>r$ 時，圓 C 與直線 L 不相交，如圖 5(c) 所示。



(a) $d<r$　(b) $d=r$　(c) $d>r$

23.圓的切線方程式

圓 C 的圓心 A、切點 P、P 點為切點與圓相切的直線 L



1.過圓上一點 $P(x_0,y_0)$的切線方程式，可利用直線 AP 與切線 L 垂直

（直線 AP 的斜率）（直線 L 的斜率）$=-1$，

$\dfrac{y_0-k}{x_0-h}\bullet\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-1$　可得切線方程式 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$

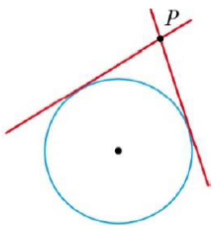
24. 過圓外一點 $P(x_0,y_0)$的切線方程式

過圓外一點 P 的，則過點 P 的兩條切線

Step1　設直線方程式

Step2　[圓心到切線的距離]＝[半徑] 幾何方法的判定

若上述切線方程式只有一解，則有一解可能為鉛垂線，直接檢驗即可判斷。



翰林出版

數學(2)

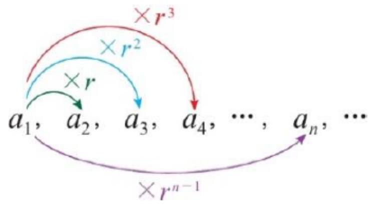
25. 等差數列的一般項

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1，公差為 d，則其一般項為 $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ 。

26.等比數列的一般項

若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 $a_1\ (a_1 \neq 0)$，公比為 $r\ (r \neq 0)$，則其一般項為

$$a_n = a_1 r^{n-1}\ 。$$



27.遞迴數列

(1) 遞迴數列的定義 :如果數列除了起始條件外，後面的項都可以由前面的項依公式計算，即可以表成 $\boldsymbol{a_n = f(a_{n-1})}$ 或者 $\boldsymbol{f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})}$ 的形式，此數列就是遞迴數列。

例如：等差數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + d,\ n \geq 2\ 。\end{cases}$

等比數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = r a_{n-1},\ n \geq 2\ 。\end{cases}$

28.等差級數求和公式

首項為 a_1，公差為 d 的 n 項等差級數和為

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1)\,d) \\ &= \frac{n\,(2a_1 + (n-1)\,d)}{2} \\ &= \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}\ 。\left(\text{即}\frac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}\right) \end{aligned}$$

29. 等比級數求和公式

首項為 $a_1 (a_1 \neq 0)$，公比為 $r\,(r \neq 0)$ 的 n 項等比級數和為

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \begin{cases} n a_1 & \text{當}\, r = 1\,\text{時}, \\ \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, & \text{當}\, r \neq 1\,\text{時。} \end{cases}$$

30. 求和公式

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ 。

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ 。

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$ 。

31. 加權平均數

設有 n 個數據 $x_1, x_2, \cdots, x_n$， 其對應的權數分別為 $w_1, w_2, \cdots, w_n$， 則加權平均數為

$$W=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

32.幾何平均數

n 個正數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的幾何平均數定義為

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}\ 。$$

33. 百分位數

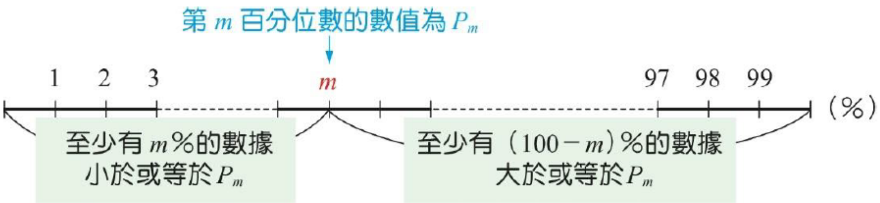


圖 3

假設一組資料有 n 筆數據，其第 m 百分位數 P_m 的算法是：先將這 n 筆數據由小到大排序，並計算 $I=n\times\frac{m}{100}$ 。

(1) 當 I 不為整數，取大於 I 的最小整數 M，則 P_m 為第 M 筆數據的值。

(2) 當 I 為整數，則 P_m 為第 I 筆數據與第 $I+1$ 筆數據的平均值。

34. 變異數、標準差

(1)設一組數據$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之算術平均數為 μ，則定義變異數與標準差如下：

$$變異數\quad \sigma^2=\frac{1}{n}((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)\ 。$$

$$標準差\quad \sigma=\sqrt{\frac{1}{n}((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)}\ 。$$

(2) 若數據$x_1, x_2, \cdots, x_n$，的平均數μ_x,標準差s_x，經直線函數 $y=ax+b$調整為 $y_i=ax_i+b,\ i=1,2\ldots,n$，則新數據$y_1, y_2, \cdots, y_n$，的平均數 $\mu_y=a\mu_x+b$,標準差$s_y=|a|s_x$。

35. 標準化數據

一組數據 $x_1,\ldots,x_n$ 的平均 $\overline{x}$，標準差 S，

則此數據的標準化數據為$\frac{x_i-\overline{x}}{S}, i=1,\ldots,n$

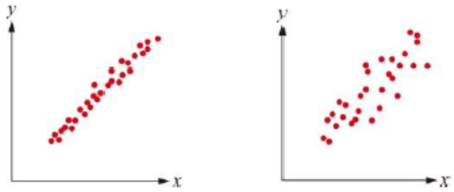
標準化數據的算術平均數為 0，標準差為 1。

翰林出版

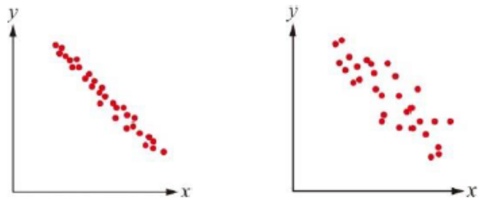
36. **正相關、負相關、零相關**

由散布圖可以快速觀察出兩個變量之間是否有關係。

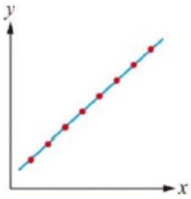
(1) **正相關**：兩個變量大約有一致的趨勢（大約同時增加或減少）。



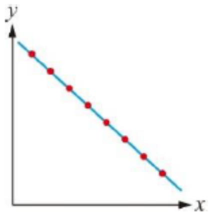
(2) **負相關**：兩個變量趨勢大約相反，一個增加，則另一個大概就會減少；或一個減少，另一個大概就會增加。



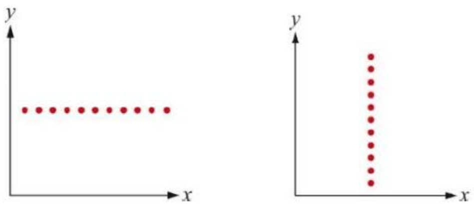
(3) **完全正相關**：資料全部在一條斜率為正的直線上。



(4) **完全負相關**：資料全部在一條斜率為負的直線上。



(5) **零相關**：兩個變量的變化之間無關。



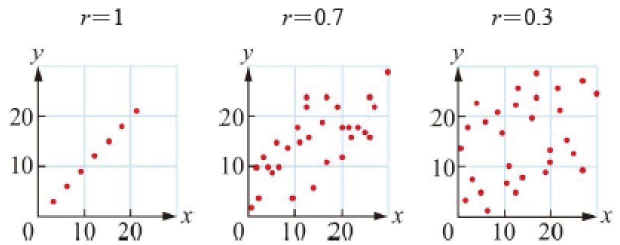
37. 由原始資料求相關係數

原始數據資料 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n) 的相關係數為

$$r=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{\sqrt{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+\cdots+(x_n-\mu_x)^2}\cdot\sqrt{(y_1-\mu_y)^2+(y_2-\mu_y)^2+\cdots+(y_n-\mu_y)^2}}$$

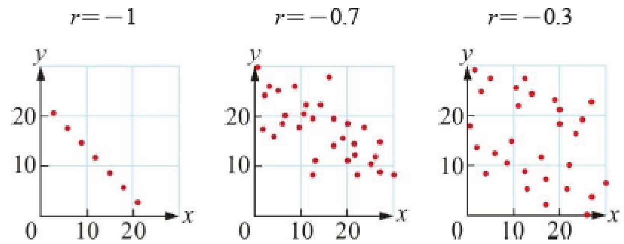
（一）相關係數 $r>0$

當 $r=1$ 時，資料均在同一條斜率為正的直線上，當 $0<r<1$ 時，r 愈大，代表資料分布大致呈右上左下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為正的直線。



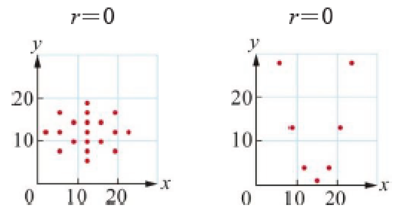
（二）相關係數 $r<0$

當 $r=-1$ 時，資料均在同一條斜率為負的直線上，當 $-1<r<0$ 時，r 的絕對值愈大，代表資料分布大致呈左上右下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為負的直線。



（三）相關係數 $r=0$

它們的分布呈現左右對稱、或者上下對稱。



又當兩組數據的散布圖完全落在一條水平直線或鉛垂直線時，我們規定其相關係數 $r=0$。

38. 二維數據的最適直線方程式

數據 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n) 之 y 對 x 的最適直線方程式為

$$y-\mu_y=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\mu_x)$$，其中 r 為相關係數，

39.加法原理

若完成一件工作的方法，可分成 k 類，各類之間都沒有重複的情形，每一類方法分別有$n_1,\ldots,n_k$種，則完成這件工作的方法是所有類的方法數的**和**，即

$$n_1+n_2+\cdots+n_k \text{ 種。}$$

40.乘法原理

若完成一件工作的方法，可依序分成 k 個步驟，且完成每一步驟的方法分別有$n_1,\ldots,n_k$種，則完成這件工作的方法是所有步驟的方法數的**乘**，即

$$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k \text{ 種。}$$

41.取捨原理

設 A，B，C 為有限集合。則有：

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$
$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

42. *n* 個不同物品的排列

將 n 個不同物品排成一列有

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 \text{ 種方法。}$$

43. *n* 個不同物品選出 *k* 個排列

令 P_k^n 表示從 n 個不同物品中選出 k 個（$0\le k\le n$）排成一列的方法數，則

$$P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}\text{。}$$

44. 含有相同物品的排列

設 n 個物品分成 k 類，每類各有 $m_1,m_2,\ldots,m_k$ 個（每類中的物品相同且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$），則這 n 個物品排成一列有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 種方法。

45. 重複排列

從 n 種物品中取出 k 個（每種物品都至少有 k 個），物品可以重複出現的排列有 n^k 種方法。

46.組合

用 C_k^n 表示從 n 個不同的物品中挑出 k 個不同物品的組合數（$0\le k\le n$），則

$$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}\text{。}$$

47. 二項式定理

設 n 為非負整數，則

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + \cdots + C_k^n x^{n-k} y^k + \cdots + C_0^n x^0 y^n \text{。}$$

48. 巴斯卡公式

$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$，$1 \le k \le n-1$。

1	C_0^0	$n=0$
1 1	$C_0^1\ C_1^1$	$n=1$
1 2 1	$C_0^2\ C_1^2\ C_2^2$	$n=2$
1 3 3 1	$C_0^3\ C_1^3\ C_2^3\ C_3^3$	$n=3$
1 4 6 4 1	$C_0^4\ C_1^4\ C_2^4\ C_3^4\ C_4^4$	$n=4$
1 5 10 10 5 1	$C_0^5\ C_1^5\ C_2^5\ C_3^5\ C_4^5\ C_5^5$	$n=5$
1 6 15 20 15 6 1	$C_0^6\ C_1^6\ C_2^6\ C_3^6\ C_4^6\ C_5^6\ C_6^6$	$n=6$

49.古典機率的定義

設一試驗的樣本空間為 S，且其樣本點個數為有限。若每一基本事件發生的機會均等，則事件 A 發生的機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ 。

50. 機率的性質

所有的機率不論是古典機率、主觀機率還是客觀機率，對所有事件 A，B 皆有下列性質：

(1) $0 \le P(A) \le 1$。

(2) $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$。

(3) $P(A')=1-P(A)$。

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

51.期望值

已知 A_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$ 為樣本空間 S 的事件，且滿足以下兩個條件：

(1) 所有事件的聯集是整個樣本空間。

(2) 任兩個事件的交集是空集合。

設事件 A_i 發生的機率為 p_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$。若事件 A_i 發生可得值 m_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$，則我們定義得值的期望值為

$$m_1 \times p_1 + m_2 \times p_2 + \cdots + m_n \times p_n \text{。}$$

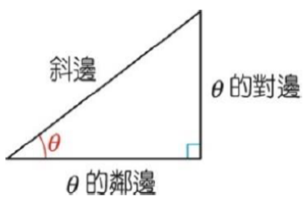
52. 直角三角形的三角比

如圖 5 所示，當 θ 為一銳角，可以畫出一個三個角為 θ, $90°-\theta$，$90°$的直角三角形。我們定義如下的三角比：

$\sin\theta=\dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的正弦。

$\cos\theta=\dfrac{\theta\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的餘弦。

$\tan\theta=\dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\text{鄰邊長}}$，稱為 θ 的正切。



值 \ θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

53. 同界角

若廣義角 θ 與 ϕ 的差為 360°的整數倍，即 $\theta-\phi=360°\cdot n$，其中 n 為整數，則稱 θ 與 ϕ 互為同界角。

例如 $485^\circ, 845^\circ, 125^\circ+360^\circ n$ 以及$-235^\circ, -235^\circ-360^\circ$ 皆是-125° 的同界角。

54. 廣義角的三角比

如下圖所示，設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，且

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=r$（其中 $r>0$），我們定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq0)$。

55. 商數關係、平方關係及餘角關係

(商數關係) $\theta\neq90°$，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$。

(平方關係) 設 $0°<\theta<90°$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

(餘角關係) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。

56.$-\theta$關係、$180°-\theta$關係、$90°-\theta$關係

對於任意角 θ，都有

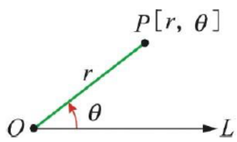
(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$,
$\cos(-\theta)=\cos\theta$,
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$。($\theta$ 的終邊不在 y 軸上時)

(2) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$,
$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$,
$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$。(當角 θ 的終邊不在 y 軸上時)

(3) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$。

57. 極坐標

給定平面上的一點 O 及以 O 為始點的射線 L。對於平面上異於 O 的任一點 P，若 $\overline{OP}=r$，且以 L 為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角為 θ，則 $[r,\theta]$ 稱為 P 點的一個極坐標，記為 $P[r,\theta]$，



58. 直角坐標與極坐標的轉換

(1) 若 P 點的極坐標為 $[r,\theta]$，則直角坐標為

$$(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)。$$

(2) 若 P 點不是原點且直角坐標為 (x,y)，則極坐標為

$$[r,\theta],$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$。

59. 三角形面積公式

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則

$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C。$$

60.正弦定理

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，且$\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，則：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

61. 餘弦定理

若$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

翰林出版
數學(3B)

62.弳

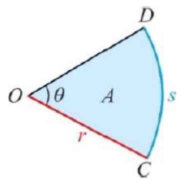
若一圓的半徑為 r，則弧長 s 所對應的圓心角 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 弳。

由 $180°=\pi$ 弳，可得

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{ 弳}\approx 0.01745\text{ 弳，}1\text{ 弳}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.3°\text{。}$$

63. 扇形的弧長與面積公式

已知圓半徑為 r，扇形 COD 的圓心角 $\angle COD=\theta$（弳），$0\le\theta\le 2\pi$，如圖 7，令扇形的弧長為 s，面積為 A，則：

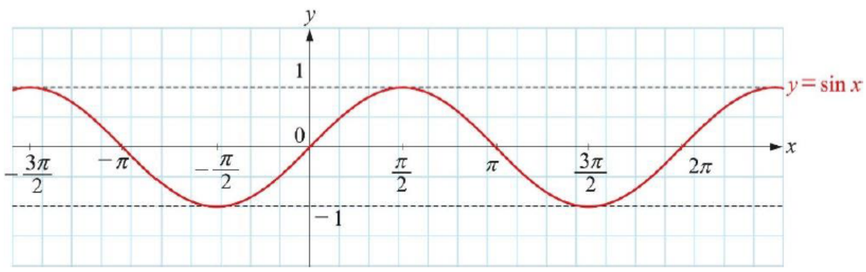


(1) 扇形的弧長 $s=r\,\theta$。

(2) 扇形的面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$

64. 正弦函數

正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形如圖 10，



且具有下列性質。

(1) 定義域為所有實數，值域為區間[−1，1]。

(2) 振幅為 1。

(3) 週期為 2π。

(4) 圖形對稱於原點。

65. 正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的平移

設 h，$k>0$。

(1) 函數 $y=\sin x+k$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向上平移 k 個單位長。

(2) 函數 $y=\sin x-k$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向下平移 k 個單位長。

(3) 函數 $y=\sin(x+h)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 h 個單位長。

(4) 函數 $y=\sin(x-h)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 h 個單位長。

66. 正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的伸縮

設 $a>0$。

(1) 函數 $y=a\sin x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的縱坐標都乘上 a 倍而得。

(2) 函數 $y=\sin ax$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\dfrac{1}{a}$ 倍而得。

67.(1)指數函數

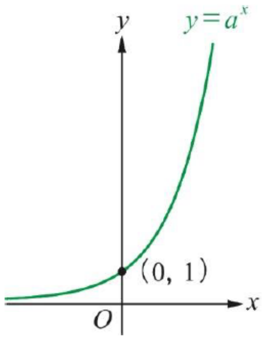
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則稱函數 $f(x)=a^x$ 是以 a 為底的指數函數。

(2)指數函數的定義域與值域

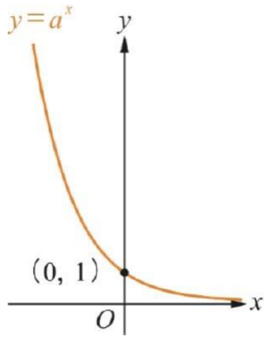
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，且值域為所有正實數。

(3)指數函數圖形

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



$a>1$



$0<a<1$

68. 常用對數的基本性質

設 r，$s>0$，t 為實數。則有以下性質：

(1) $\log r+\log s=\log rs$。 (2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$。 (3) $\log r^t=t\times\log r$。

69. 常用對數的性質

設 r，$s>0$，t 為實數，則：

(1) $\log r+\log s=\log rs$。

(2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$。

(3) $\log r^t=t\log r$。

70. 一般對數

設 $a>0$，$a\neq 1$，且 $r>0$。若滿足 $a^b=r$，則稱 b 為以 a 為底時，r 的對數，

記作

$b=\log_a r$，其中 a 稱為底數，r 稱為真數。

71. 換底公式

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，對於任意正數 r，均有

$\log_a r=\dfrac{\log r}{\log a}$。

72.對數函數

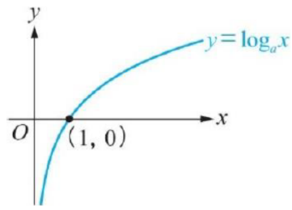
(1) 設 $a>0$，$a\neq 1$，且 x 是任意正實數，則函數

$$f(x)=\log_a x$$

稱為以 a 為底的對數函數，其中定義域為所有正實數，值域為所有實數。

(2) 對數函數 $y=\log_a x$（$a>1$）的圖形特徵

設 $a>1$，則函數 $y=\log_a x$ 的圖形如圖 3，且具有下列性質。



(1) 圖形永遠在 y 軸的右側。
(2) 圖形通過點（1，0）。
(3) 圖形由左而右逐漸上升，且上升地愈來愈慢。
(4) 當 x 值愈接近 0，函數值愈小，圖形愈接近 y 軸。
(5) 圖形凹口向下。

73. 單利與複利

設本金為 a，每期利率為 r。

(1) 以單利孳息，經過 n 期後，本利和為 $a(1+nr)$。

(2) 以複利孳息，

每年的本利和是前一期的 $(1+r)$ 倍，故 n 期後的本利和是

$$a\underbrace{(1+r)(1+r)\cdots\cdots(1+r)}_{n\text{ 個}}=a(1+r)^n。$$

74. 七二法則

這是一種簡易估算的方法其公式如下：若每期利率為 x%且以複利計算，則本利和達到原來本金的兩倍所需時間大約要 $\dfrac{72}{x}$ 期。

75. (1)向量的長度

坐標平面上的任意一個向量 $\vec{v}=(x,y)$，則$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ 為 $\vec{v}$ 的長度。

(2) 兩點決定一個向量的坐標表示法

若 A、B 兩點的坐標分別為 (a_1,a_2)、(b_1,b_2)，則

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)。$$

(3) 向量加法的坐標表示法

設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$。

(4) 向量減法的坐標表示法

若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則：

(a) $-\vec{a}=(-a_1,-a_2)$。　(b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$。

76. 向量的線性組合

若 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量 $\overline{OP}$ 必能唯一表成

$$\overline{OP}=x\overline{OA}+y\overline{OB}$$

的形式，其中 x，y 為實數。

77. 分點公式

設 P 點是線段 $\overline{AB}$ 上的點，且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則對平面上任一點

O，$$\overline{OP}=\frac{n}{m+n}\overline{OA}+\frac{m}{m+n}\overline{OB}。$$

78. 平面向量的內積

(1) 坐標平面上兩向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$ 的內積為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2。$$

(2) 坐標平面上兩非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$，

其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，

79. 兩向量垂直的判定法則

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個非零平面向量，則：

(1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

(2) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直。

80. 內積的基本性質

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為平面上任意向量，α 為任意實數，則：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。

(2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$。

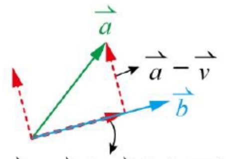
(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$。

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$。

81. 向量的正射影

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為平面上兩個向量，且 $\vec{b}\neq\vec{0}$，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的

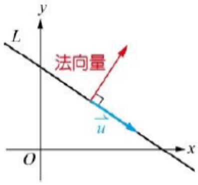
正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$。



$\vec{v}=\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影

82. 直線的法向量

向量 (a, b) 為直線 $L：ax+by+c=0$ 的一個法向量。



83. 單點透視法

單點透視法就是在平面的透視圖中，讓空間中原本互相平行的直線都交會到同一個消失點，在這個透視圖中只有一個透視消失點，因而稱之為單點透視法。

如下圖左所示，平行的鐵軌交會於無窮遠，這個點在單點透視法中叫做**消失點**（VP）。下圖右就是另一張單點透視圖，所有原本平行的直線都會交會於消失點。


圖左　鐵軌

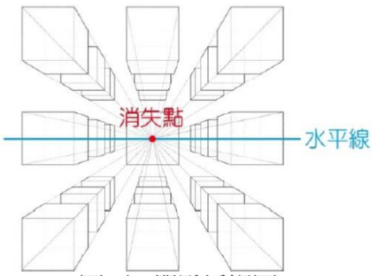


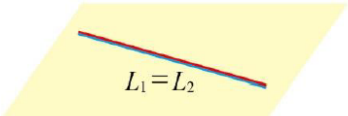
圖 右 單點透視圖

數學(4B)

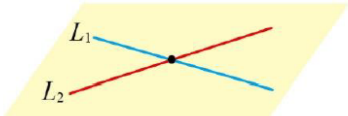
84. 直線與直線的關係

空間中的兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有下列四種情形：

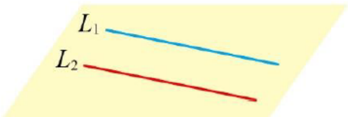
(1) 兩直線重合。



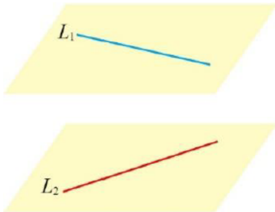
(2) 兩直線恰交於一點。



(3) 兩直線平行。

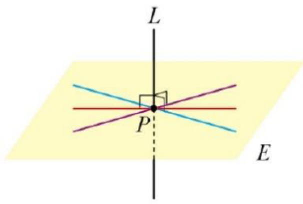


(4) 兩直線歪斜。



85.直線與平面垂直的定義

若直線 L 與平面 E 相交於一點 P，且平面 E 上通過 P 點的每一條直線都與直線 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，記為 $L \perp E$，此時直線 L 稱為平面 E 的一條法線

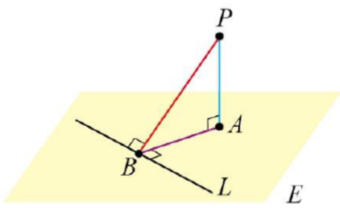


86. 三垂線定理

設直線 PA 與平面 E 垂直於 A 點，直線 L 為平面 E 上不通過 A 點的直線。

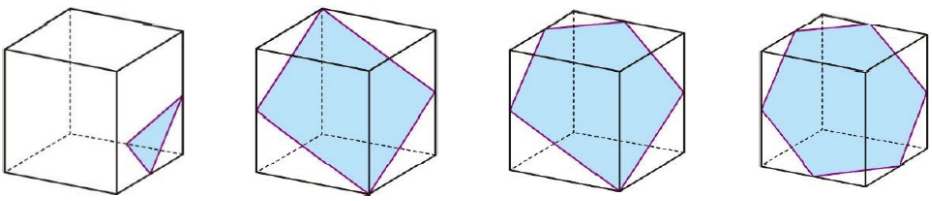
(1) 若由 A 點向直線 L 作垂線，設其垂足為 B，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點。

(2) 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點。



87. 空間圖形的截痕

平面與立體圖形相交時，其相交的部分稱為截痕，而截痕所圍成的圖形稱為截面。例如，下列圖形是平面與正立方體的截痕及截面。



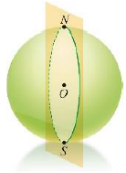
88.距離公式

坐標空間中，$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 兩點的距離為

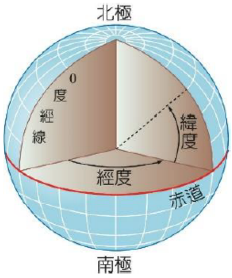
$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$ 。

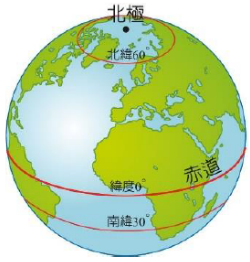
89. 球面與平面的截痕及經緯線

(1) 設 O 為地球球心，S、 N 為地球的南、北極，沿地表連接 N 與 S 的大圓弧（半個大圓），稱為**經線**。經線的度數就是該經線所在的半平面與 0 度經線的半平面所夾的兩面角的度數，度數的取值為



(2) **緯線**是由垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓，其中唯一的大圓稱為**赤道**，也稱為 0 **度緯線**，其餘的小圓區分為**北緯線**與**南緯線**，緯線的度數就是經過緯線上任一點的球半徑與赤道面所夾的度數。

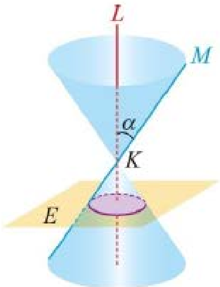




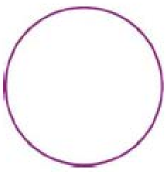
90 圓錐曲線

平面 E 與直圓錐面的截痕可以是圓、橢圓、拋物線或雙曲線，如下列各圖所示。

(1) **圓**：

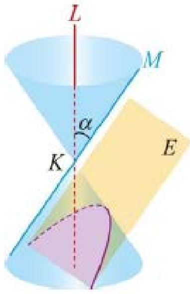


(a)

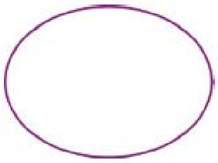


(b)

(2) **拋物線**：

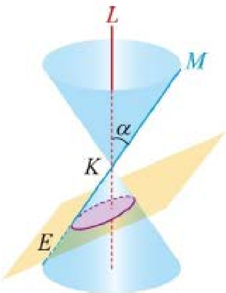


(a)

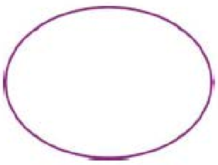


(b)

(3) **橢圓**：

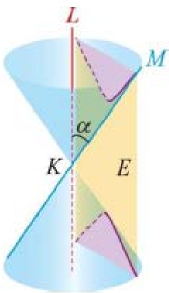


(a)

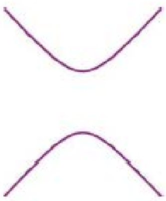


(b)

(4) **雙曲線**：



(a)



(b)

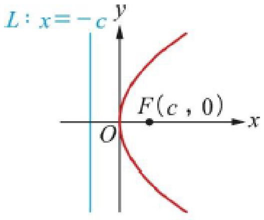
翰林出版

91 拋物線的標準式

1. $y^2=4cx$ 圖形有兩種可能：

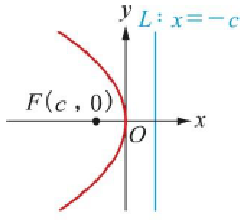
(1) 當 $c>0$ 時，其圖形開口向右，圖(a)。

(2) 當 $c<0$ 時，其圖形開口向左，圖(b)。



$c>0$

(a)



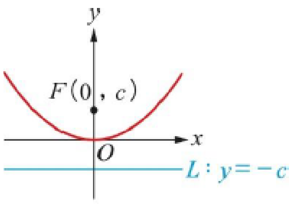
$c<0$

(b)

2. $x^2=4cy$ 圖形有兩種可能：

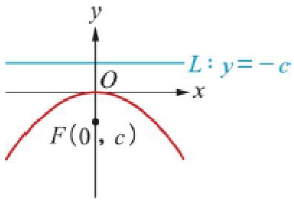
(1) 當 $c>0$ 時，其圖形開口向上，圖(c)。

(2) 當 $c<0$ 時，其圖形開口向下，圖(d)。



$c>0$

(c)



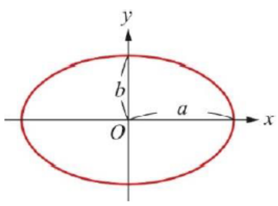
$c<0$

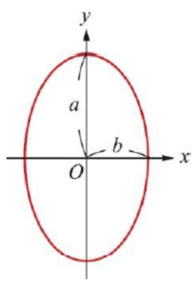
(d)

92. 橢圓的標準式

(1) 設長軸在 x 軸上，則橢圓的標準式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

(2) 設長軸在 y 軸上，則橢圓的標準式為 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$。

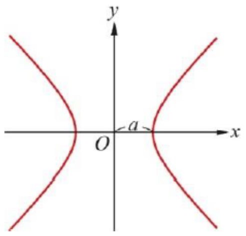


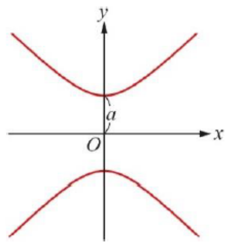


93. 雙曲線的標準式

(1) 設貫軸在 x 軸上，則雙曲線的標準式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

(2) 設貫軸在 y 軸上，則雙曲線的標準式為 $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$。





94. 條件機率

設 A，B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$。則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率為 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

95. 獨立事件

設 A，B 為兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A，B 為獨立事件。

96. 三事件為獨立事件

設 A，B，C 為三事件，同時滿足下列條件時，稱 A，B，C 三事件為獨立事件。

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。
(2) $P(B\cap C)=P(B)P(C)$。
(3) $P(A\cap C)=P(A)P(C)$。
(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$。

97. 矩陣的定義

設 m，n 為正整數，形如

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \text{第 } j \text{ 行} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \text{第 } i \text{ 列} \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

的矩形陣列稱為 $m\times n$ 階矩陣，以 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示。此矩陣有 m 列，n 行，其中 a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元，稱為矩陣的第 (i, j) 元。

98. 矩陣加法、減法與係數積的定義

1. 設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，且

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}，則$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

即將相同位置的元相加。也就是若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。

2. 矩陣減法的定義

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，則定義 A 與 B 的差為 $A-B=A+(-B)$。即 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元。

也就是若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

3. 矩陣的係數積

即若 $A=[a_{ii}]_{m\times n}$，則 $rA=[ra_{ii}]_{m\times n}$。

99. 矩陣的係數積具有以下的性質：

(1) $r(A+B)=rA+rB$。
(2) $(r+s)A=rA+sA$。
(3) $(rs)A=r(sA)$。
(4) $0A=O$。　（等號左邊表示乘上 0，等號右邊是零矩陣）
(5) $(-1)A=-A$。

100. 矩陣乘法的定義

設 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，$C=[c_{ij}]_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，即

$$\begin{array}{c} \\ \\ 第\ i\ 列 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}\cdot \begin{array}{c} 第\ j\ 行 \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$A \qquad\qquad B \qquad = \qquad C$$

在前面的定義中，注意到 A，B 兩個矩陣相乘時，矩陣 A 的行數必須要等於矩陣 B 的列數，AB 才有意義，而且

$$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}。$$

相等

101. 乘法反方陣

1. 設 A 是一個 n 階方陣，若存在 n 階方陣 B 滿足 $AB=BA=I_n$，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以符號 A^{-1} 表示。

2. 二階乘法反方陣的公式

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\det A \neq 0$，則 A 有乘法反方陣 A^{-1}，

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

若 $\det A=0$，則 A 沒有乘法反方陣。