

基隆市立中山高中

高一新生先修銜接教材

數學科

基隆市立中山高級中學教務處

第一回 乘法公式

1. 二次乘法公式：

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(4) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

2. 三次乘法公式：

$$(1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (2) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(3) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(4) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

1. 試利用 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 展開 $(a+b+c)^2 =$ _____。

$$Ans: a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

2. 試展開下列各式：(1) $(2x+3y)^2 =$ _____。 (2) $(3x^2-4y)^2 =$ _____。

(3) $(a+2b+3c)(3a+2b+c) =$ _____。

$$Ans: (1) 4x^2 + 12xy + 9y^2 \quad (2) 9x^4 - 24x^2y + 16y^2 \quad (3) 3a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 8ab + 8bc + 10ac$$

3. 試展開下列各式：

$$Ans: (1) 4a^2 - 4ab + b^2 - 9 \quad (2) 1 - a^8 \quad (3) \frac{x^3}{27} - \frac{1}{8}$$

$$(1) (2a-b+3)(2a-b-3) = \text{_____}。$$

$$(2) (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4) = \text{_____}。$$

$$(3) \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right) = \text{_____}。$$

4. 利用乘法公式計算： (1) $197 \times 203 =$ _____。 (2) $19^3 =$ _____。

Ans : (1) 39991 (2) 6859

5. 設 a, b 為實數，且 $a - b = 5, ab = -3$ ，試求 $a^3 - b^3 =$ _____。

Ans : 80

6. 若 $a + b = 5, ab = 2$ ，則 (1) $a^2 + b^2 =$ _____。 (2) $a^3 + b^3 =$ _____。

Ans : (1) 21 (2) 95

7. 若 $a - b = -3, ab = 4$ ，求 (1) $(a + b)^2 =$ _____。 (2) $a^3 - b^3 =$ _____。

Ans : (1) 25 (2) -63

8. 設 $a + b + c = 6, a^2 + b^2 + c^2 = 10$ ，求 $ab + bc + ca =$ _____。

Ans : 13

9. 若 $a + \frac{1}{a} = 3$ ，試求 $a^3 + \frac{1}{a^3} =$ _____。

Ans : 18

第二回 方根

1. 平方根的意義：

(1) 如果 a 與 b 滿足關係式 $b^2 = a$ ，則稱 b 是 a 的平方根。

(2) 每個數 a 都恰有兩個平方根。

2. 平方根的運算規則：

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad (a, b \geq 0) \quad (2) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (a > 0, b \geq 0) \quad (3) \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(4) \sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0) \quad (5) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad (a, b \geq 0, a \neq b)$$

3. 立方根的意義：

(1) 如果 a 與 b 滿足關係式 $b^3 = a$ ，則稱 b 是 a 的立方根。

(2) 每個數 a 都恰有三個立方根。

1. (1) 試化簡 $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{50} - 6\sqrt{2} =$ _____。

(2) 試化簡 $\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{48} - \sqrt{27} =$ _____。 *Ans:* (1) $5\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

2. 試化簡 $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{24} - \sqrt{216} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} =$ _____。 *Ans:* $-\frac{17}{6}\sqrt{6}$

3. 試化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{3}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{18} + \sqrt{75} =$ _____。 *Ans:* $\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2$

4. 試化簡 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $\sqrt{2}$

5. (1) 試化簡 $\sqrt[3]{3} + 10\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 試化簡 $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 Ans: (1) $-4\sqrt[3]{3}$ (2) $5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$

6. 求下列各數的值：

Ans: (1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{7}{4}$ (3) -0.3 (4) 0.5

(1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (2) $\sqrt[3]{-\frac{343}{64}} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (3) $\sqrt[3]{-0.027} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (4) $\sqrt[3]{0.125} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

7. 設下列各方根為整數，求 x 的最小正整數值： (1) $\sqrt[3]{12x}$ (2) $\sqrt[3]{360x}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{120}{x}}$

Ans: (1) 18 (2) 75 (3) 15

8. 試化簡下列各式： (1) $\sqrt{8+\sqrt{60}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\sqrt{8-\sqrt{28}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{7} - 1$

9. 化簡： (1) $\sqrt{21-2\sqrt{38}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\sqrt{13+4\sqrt{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1) $\sqrt{19}-\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{8}+\sqrt{5}$

10. 化簡： (1) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

11. 若 $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，求 $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{a-b-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 *Ans:* $\frac{8}{11}$

12. 若 $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $(4, \sqrt{2}-1)$

第三回 方程式

1. 方程式：含有未知數的等式。滿足方程式的數值稱為方程式的「解」或「根」。

2. 解方程式：

(1) 一元一次方程式 $ax + b = 0$ ：利用等量公理移項處理。

(2) 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ：

法 1°：因式分解(十字交叉相乘)法。 法 2°：配方法。

法 3°：公式解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，其中 $D = b^2 - 4ac$ 稱為判別式。

① 若 $D > 0$ ，則方程式的兩根為相異實根。

② 若 $D = 0$ ，則方程式的兩根為相等實根。

③ 若 $D < 0$ ，則方程式的兩根為共軛虛根(非實根)。

(3) 二元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ ：利用加減消去法或代入消去法處理。

3. 一元二次方程式的根與係數關係：

設方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的二根為 α, β ，則 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 。

1. 解下列各方程式： (1) $(3x+1) - 2(x+5) = (2x-4) + 4(x-6)$ (2) $\frac{2x-1}{3} - 1 = \frac{5x+1}{8} - \frac{3x+1}{6}$

Ans: (1) $x = \frac{19}{5}$ (2) $x = \frac{31}{13}$

2. 解方程組 $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 4y = -4 \end{cases}$ 得 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 Ans: $(-4, 6)$

3. 方程式 $(2x+y-3)^2 + (x-y)^2 = 0$ 之解 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 Ans: $(1, 1)$

4. 解方程組 $\begin{cases} \frac{3}{2x-y+5} - \frac{6}{x+y-4} = 5 \\ \frac{2}{2x-y+5} + \frac{15}{x+y-4} = -3 \end{cases}$ 得 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 Ans: $(-1, 2)$

5. 試解下列各一元二次方程式：

Ans : (1) -2 or $-\frac{1}{2}$ (2) 16 or 18 (3) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(1) $(2x+3)(x+1)=1$ (2) $x^2-34x+288=0$ (3) $x^2-x-1=0$

6. 若 $ax^2-4x-3=0$ 之解為 $x=1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，則 $a=$ _____。

Ans : 2

7. 設 $x^2-2x-k=0$ 無實數解，試求 k 之範圍為_____。

Ans : $k < -1$

8. 設 a 為實數，若二次方程式 $x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，則 $a=$ _____。

Ans : -8 or 4

9. 已知方程式 $3x^2+5x-4=0$ 的二根為 α, β ，試求下列各式的值：

(1) $\alpha^2 + \beta^2 =$ _____。 (2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$ _____。 (3) $\alpha - \beta =$ _____。

Ans : (1) $\frac{49}{9}$ (2) $-\frac{49}{12}$ (3) $\pm \frac{\sqrt{73}}{3}$

10. 設一元二次方程式 $ax^2+8x+c=0$ 兩根和為 -8 ，兩根積為 6 ，則 數對 $(a, c) =$ _____。

Ans : $(1, 6)$

第四回 不等式

1. 不等式：利用符號「 $>$ 」、「 $<$ 」、「 \geq 」、「 \leq 」所連結起來的關係式。
2. 不等式的解：滿足不等式的數值。
3. 解不等式的基本原則：
- (1) 若 $a > b$ ，則 $a + c > b + c$ 且 $a - c > b - c$ 。
- (2) 若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$ 且 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 。 (3) 若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$ 且 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 。
4. 絕對值不等式：設 $a \geq 0$
- (1) 若 $|x| < a$ ，則 $-a < x < a$ 。 (2) 若 $|x| \leq a$ ，則 $-a \leq x \leq a$ 。
- (3) 若 $|x| > a$ ，則 $x < -a$ 或 $x > a$ 。 (4) 若 $|x| \geq a$ ，則 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$ 。
- ※5. 二次不等式：設 $\alpha < \beta$
- (1) 若 $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ ，則 $\alpha < x < \beta$ 。 (2) 若 $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ ，則 $x < \alpha$ 或 $x > \beta$ 。

1. 解下列各不等式，並在數線上圖示其解： (1) $-3 \leq 2x + 3 < 15$ (2) $2x - 2 < 6 \leq 3x + 3$

Ans: (1) $-3 \leq x < 6$ (2) $1 \leq x < 4$

2. 設 $2mx + 3m > 0$ 的解是 $x < -\frac{3}{2}$ ，試求 $-5mx < -3m$ 的解為_____。 Ans: $x < \frac{3}{5}$

3. 不等式組 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} \geq \frac{x+2}{5} \\ \frac{x-2}{2} \leq \frac{x+1}{4} \end{cases}$ 之解為_____。 Ans: $3 \leq x \leq 5$

4. 解不等式 $3 < |-3x+8| \leq 6$ ，並在數線上圖示其解。

$$Ans: \frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{3} \text{ 或 } \frac{11}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

5. 不等式組 $\begin{cases} |x-3| < 2 \\ |-x+1| < 1 \end{cases}$ 之解為_____。

$$Ans: 1 < x < 2$$

6. 設 $|ax+1| \leq b$ 之解為 $-2 \leq x \leq 5$ ，試求實數對 $(a, b) =$ _____。

$$Ans: (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$$

7. 設 a, b 為實數且 $|2x+a| < b$ 之解為 $-3 < x < 5$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。 $Ans: (-2, 8)$

8. 已知 a, b 為實數，且 $|ax-2| > b$ 的解為 $x < -1$ 或 $x > 5$ ，試求數對 $(a, b) =$ _____。

$$Ans: (1, 3)$$

第五回 二次函數

1. 二次函數：形如 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 之函數，圖形為拋物線。
2. 二次函數經配方法得 $y = a(x-h)^2 + k = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ ，其中
 - (1) ① $a > 0$ 時，圖形向「上」開口，此時有最小值 $y = k$ 。
 - ② $a < 0$ 時，圖形向「下」開口，此時有最大值 $y = k$ 。
 - (2) 圖形之對稱軸方程式為 $x - h = 0$ 。
 - (3) 圖形與對稱軸之交點稱為頂點，其坐標為 $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 。
3. 二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸交點之 x 坐標即為二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之解。
4. 二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 y 軸交點坐標為 $(0, c)$ 。
5. (1) $b^2 - 4ac > 0$ 時，圖形與 x 軸交於相異兩點。 (2) $b^2 - 4ac = 0$ 時，圖形與 x 軸切於一點。
(3) $b^2 - 4ac < 0$ 時，圖形與 x 軸沒有交點。

1. 試描繪 $y = 2x^2 - 8x + 11$ 之圖形，並標出其對稱軸與頂點坐標。

Ans: 對稱軸 $x - 2 = 0$; 頂點 $(2, 3)$

2. 設 $y = -4x^2 + 3x + 1$ 交 x 軸於 A, B 兩點，求 (1) 頂點坐標為_____。(2) $\overline{AB} =$ _____。

Ans: (1) $\left(\frac{3}{8}, \frac{25}{16}\right)$ (2) $\frac{5}{4}$

3. 二次函數 $y = 2x^2 - 8$ 的圖形與 x 軸交於 A, B 兩點，與 y 軸交於 C 點，求 $\triangle ABC$ 的面積。

Ans: 16

4. 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形交 x 軸於 $(1, 0), (-2, 0)$ ，交 y 軸於 $(0, 2)$ ，求序組

$(a, b, c) =$ _____。

Ans: $(-1, -1, 2)$

5. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -3)$ 三點，求序組 $(a, b, c) =$ _____。

Ans: $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3)$

6. 若二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的頂點為 $(1, -3)$ 且通過點 $(-1, 5)$ ，求 $f(x) =$ _____。

Ans: $2x^2 - 4x - 1$

7. 求下列各二次函數的最大值或最小值：*Ans:* (1) max. 3 (2) min. $\frac{11}{3}$ (3) max. 11; min. -5

(1) $y = -3x^2 + 6x$

(2) $y = 3x^2 + 4x + 5$

(3) $y = x^2 - 2x - 4, -3 \leq x \leq 3$

8. 將 20 分成兩數，使其平方和最小，試求此最小值及此時兩數之值。

Ans: 最小值 200; 兩數均為 10

9. 已知 A, B 為數線上二點，坐標分別為 7, 2，試在此數線上求一點 P ，使 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 之值最小，並求此最小值。

Ans: $P(\frac{9}{2}); \min. \frac{25}{2}$

10. 一果園中種了 25 棵橘子樹，每棵樹平均可生產橘子 450 顆。若每加種一棵橘子樹，則每棵橘子樹平均生產量下降 10 顆，問應加種幾棵橘子樹，才能使果園的生產量最大？且最大產量為何？

Ans: 加種 10 棵，最大產量為 12250 顆

第六回 有理數與數線

1. 實數 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理數} \left\{ \begin{array}{l} \text{整數：正整數、0、負整數} \\ \text{分數：有限小數、循環小數} \end{array} \right. \\ \text{無理數：不循環的無限小數(如：}\pi\text{、}\sqrt{3}\text{、}2+\sqrt{3}\text{、}\dots) \end{array} \right.$

2. 有理數：設 m, n 都是整數，且 $n \neq 0$ ，凡是可表成 $\frac{m}{n}$ 的數稱為 有理數。

3. 若 m, n 互質，且 n 只含有 2 或 5 的正質因數，則 $\frac{m}{n}$ 必可化為整數或有限小數。

1. 試將 0.235 化成最簡分數為_____。

Ans: $\frac{47}{200}$

2. 試將下列各循環小數化為最簡分數：(1) $0.23\bar{6} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) $1.3\bar{6} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1) $\frac{71}{300}$ (2) $\frac{15}{11}$

3. 試以最簡分數表示 $0.\bar{1}2 - 0.1\bar{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $-\frac{2}{165}$

4. 試比較 $a = \frac{11}{18}$, $b = \frac{13}{21}$, $c = \frac{14}{23}$ 三數的大小。

Ans: $b > a > c$

5. 試比較 0.33 與 $\frac{1}{3}$ 的大小，並求其相差多少？

Ans: $0.33 < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{300}$

6. 設 a, b 是有理數，且 $a < b$ ，試比較 $a, b, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ 的大小。 Ans: $a < \frac{2a+b}{3} < \frac{a+2b}{3} < b$

7. 有一個最簡分數，其分子、分母之和為 70，將其化成十進位小數並四捨五入後得 0.6，求此最簡分數。

Ans: $\frac{27}{43}$

8. 設 $\frac{k}{280}$ (k 為正整數) 為介於 $\frac{1}{8}$ 與 $\frac{1}{7}$ 之間的有理數，求 k 之值。

Ans: 36, 37, 38, 39

9. 下列各數，哪些是無理數： (1) $\sqrt{72}$ (2) $\sqrt{25}$ (3) $2.1\overline{01}$ (4) $\sqrt{3}+1$
(5) $0.1010010001\dots$ (夾在兩個 1 之間 0 的個數逐一增多)

Ans: (1)(4)(5)

10. 已知 $\sqrt{2}$ 是無理數，3 是有理數，試問 $3+\sqrt{2}$ 是有理數，還是無理數？

Ans: 無理數

11. (1) 試比較 $2\sqrt{7}$ 與 $3\sqrt{3}$ 的大小。 (2) 試比較 7 與 $5\sqrt{2}$ 的大小。

Ans: (1) $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$ (2) $7 < 5\sqrt{2}$

12. 設 $a = \sqrt{8} - \sqrt{7}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ ，試比較 a, b 的大小。

Ans: $a < b$